Série VIII. — Tome VI. N° 3. Mars 1945.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE

ET

LE RADIUM

EFFET RAMAN DANS LES CRISTAUX : SYMÉTRIE DES IONS SO_4^{--} DANS LE GYPSE

Par A. ROUSSET et R. LOCHET.

Faculté des Sciences de Bordeaux.

Sommaire. — La polarisation des raies Raman du gypse montre que, contrairement à ce qu'on observe dans les solutions de sulfates alcalins, les ions SO_4^{--} de ce cristal n'ont plus la symétrie du tétraèdre régulier; dans ces ions déformés, on ne trouve plus comme éléments de symétrie qu'un axe binaire parallèle à l'axe binaire de ce cristal monoclinique. Considérations théoriques et étude expérimentale.

Introduction. — Les ions SO_4^{--} des solutions aqueuses des sulfates alcalins sont caractérisés par quatre raies Raman dont les fréquences moyennes sont : 981 cm^{-1} pour la raie polarisée, et 456, 617 et 1 100 cm^{-1} pour les trois raies dépolarisées. Ce résultat confirme la structure tétraédrale régulière de cet ion, les quatre atomes d'oxygène étant aux sommets d'un tétraèdre régulier dont l'atome de soufre occupe le centre. Dans le spectre Raman d'un cristal de gypse, on observe un plus grand nombre de raies qu'on doit attribuer aux mouvements « internes » de l'ion SO_4^{--}, leurs fréquences étant voisines de celles obtenues avec les solutions de sulfates alcalins.

Après avoir étudié la polarisation de ces raies, Cabannes [1] a pu conclure que, dans le gypse, l'ion SO_4^{--} n'a plus la symétrie du tétraèdre régulier (type T_d), ni même celle résultant d'un léger aplatissement suivant un axe alterne d'ordre 4 (type S_4''), mais que dans l'ion légèrement déformé ne subsistent plus que trois axes binaires rectangulaires (type D_2). Dans cette hypothèse, les neuf fréquences distinctes sont toutes actives dans l'effet Raman, cinq sont symétriques, et quatre sont antisymétriques par rapport à l'axe binaire du cristal monoclinique. Le défaut de dispersion de son spectrographe ne lui a pas permis de les séparer toutes, mais d'après leur état de polarisation, il a pu indiquer celles dont le dédoublement était probable. Voici le résultat de ces mesures, reporté au-dessous des fréquences observées dans les solutions des sulfates alcalins :

Solution......	456 (*D*)		617 (*D*)	
Gypse........	414 (*S*)	495 (*S*)	620 (*S* + *A*)	671 (*A*)
Solution......	981 (*P*)		1102 (*D*)	
Gypse........	1109 (*S*)		1136 (*S* + *A*)	? (*A*)

(*D*, dépolarisée; *P*, polarisée; *S*, symétrique; *A*, antisymétrique). En supposant que la déformation de l'ion a supprimé la dégénérescence de la fréquence double (456 cm^{-1}) et des fréquences triples (617 et 1 102 cm^{-1}) du tétraèdre régulier, on doit observer une raie antisymétrique de fréquence voisine de 1130 cm^{-1}.

Nous avons repris l'étude expérimentale de la polarisation des raies internes des ions SO_4^{--} du gypse. Les dédoublements que nous avons pu observer et l'état de polarisation des composantes confirment la classification des neuf raies Raman en cinq symétriques et quatre antisymétriques, prévue par Cabannes, mais la confrontation des résultats expérimentaux avec la théorie montre que les ions déformés ne possèdent plus comme éléments de symétrie qu'un axe binaire, parallèle à l'axe binaire du cristal.

Prévisions théoriques. — Le problème relatif aux cristaux dont la plus petite maille contient plusieurs ions ou molécules a été résolu par J. Cabannes et R. Aynard [2] pour les raies internes

de l'eau de cristallisation du gypse, par nous-mêmes et nos collaborateurs pour les raies externes du naphtalène [3] et des dérivés dihalogénés du benzène [4], et pour les raies externes et internes des ions ClO_3^- d'un cristal de chlorate de soude [5].

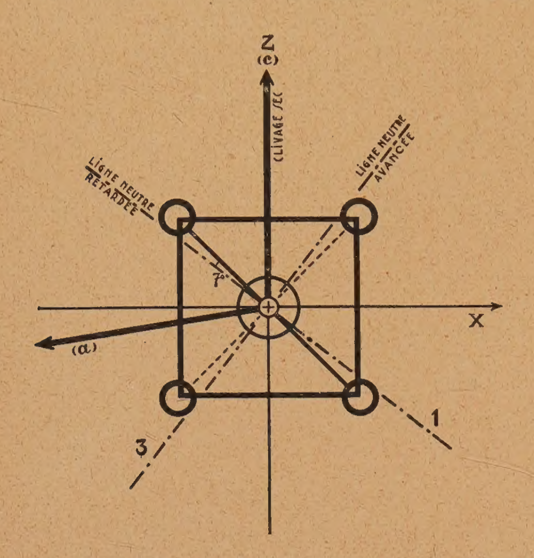


Fig. 1. — *Projection d'un ion* SO_4^{--} *sur le plan de symétrie* (1-3) *de la maille.*

L'axe binaire, perpendiculaire au plan de la figure, est figuré au centre par une croix; les atomes d'oxygène sont aux sommets d'un carré, dont l'atome de S occupe le centre.

Nous avons appliqué à la recherche des fréquences propres du cristal de gypse, caractéristiques des mouvements internes de l'ion SO_4^{--}, la règle suivante (J. Cabannes) :

1° On dénombre et l'on classe les fréquences propres de l'ion pris isolément. La théorie des groupes donne pour chacun des 32 groupes de recouvrement auxquels peut appartenir l'ion (ou la molécule) le nombre d'oscillations et leur forme : symétrique, antisymétrique et dégénérées [6];

2° On suppose que tous les ions prennent simultanément l'un des mouvements ainsi définis et l'on fait le couplage de façon à retrouver pour l'oscillation d'ensemble de la maille une forme compatible avec le groupe fini isomorphe du groupe de recouvrement du cristal. Comme en général les éléments de symétrie de l'ion ne coïncident pas avec ceux du cristal, on observera un dédoublement des fréquences dégénérées de l'ion.

Appliquons cette règle à la détermination des fréquences propres du gypse supposé constitué uniquement d'ions SO_4^{--}. Le gypse est un cristal monoclinique, l'axe binaire est perpendiculaire au plan de clivage facile. La maille renferme 4 ions SO_4^{--} qui se déduisent à partir de l'un d'eux par symétrie par rapport aux centres du groupe spatial. En ne tenant compte que de leur orientation, ces ions se réduisent à deux types, symétriques par rapport au plan perpendiculaire à l'axe binaire. L'étude aux rayons X [7] permet de placer ces ions par rapport aux axes 1, 2, 3 de l'ellipsoïde des indices (2, axe binaire; 1 et 3, lignes neutres de la face de clivage, 1 étant la ligne neutre retardée) (*fig.* 1). Ces ions apparaissent comme des tétraèdres réguliers, leurs projections sur la face de clivage sont des carrés. Soient x, y, z les trois axes alternes d'ordre 4; l'un d'eux, oy, est parallèle à l'axe binaire; les deux autres, dont le plan est parallèle à la face de clivage, sont à peu près également inclinés sur les lignes neutres de cette face (à 6° près).

1° Supposons d'abord que les ions SO_4^{--} aient gardé dans le gypse la symétrie du tétraèdre régulier. Les fréquences propres de l'ion sont au nombre de quatre, comme on l'observe dans le spectre Raman des sulfates alcalins en solution : l'une d'elles est symétrique (S); une autre doublement dégénérée (D_{II}); deux autres triplement dégénérées (D_{III}).

Pour chaque orientation de la vibration incidente, le tenseur $[a]$ relatif à l'ion donne l'amplitude des vibrations diffusées, parallèles aux axes x, y, z de cet ion [8]. On passe facilement au tenseur [A] relatif au cristal et rapporté aux axes 1, 2, 3 de l'ellipsoïde des indices, puisqu'on connaît les orientations relatives des deux trièdres x, y, z et 1, 2, 3 (y parallèle à 2, x et z également inclinés sur 1 et 3).

Le tableau I résume les prévisions théoriques dans l'hypothèse d'une symétrie T_d de l'ion SO_4^{--}.

Le groupe fini isomorphe étant l'holoédrie du système monoclinique (L_2, C), les raies Raman du cristal se classent en symétriques ($A_{12} = A_{23} = 0$) et antisymétriques ($A_{ii} = A_{13} = 0$) par rapport à l'axe binaire; on devrait donc observer six raies distinctes : quatre symétriques et deux antisymétriques par rapport à l'axe binaire.

2° Dans l'hypothèse d'un ion légèrement déformé suivant l'axe alterne d'ordre 4 qui est parallèle à l'axe binaire du cristal (type S_4^a), ne sont actives dans la diffusion que les trois fréquences symétriques à la fois par rapport à l'axe quaternaire et aux deux axes binaires; leur tenseur $[a]$ est de la forme

$$a_{xx} = a_{zz} \neq a_{yy}, \qquad a_{ik} = 0$$

et leur tenseur [A] s'écrit

$$A_{11} = A_{33} \neq A_{22}, \qquad A_{ik} = 0.$$

A chacune d'elles correspond dans le spectre Raman du cristal une raie symétrique; donc en tout, trois raies symétriques.

3° Supposons maintenant que les arêtes du tétraèdre, perpendiculaires à l'axe alterne d'ordre 4, tournent légèrement autour de cet axe; le tétraèdre ne possède plus que trois axes binaires rectangulaires (type D_2). Les neuf oscillations de l'ion peuvent

TABLEAU I.

Oscillations de l'ion.	Tenseur de l'ion [a].	Tenseur du cristal [A].	Raies Raman du cristal.
1 S.......	$a_{xx} = a_{yy} = a_{zz}$, $a_{ik} = 0$	$A_{11} = A_{22} = A_{33}$, $A_{ik} = 0$	1 S
1 D_{II}.......	$a_{xx} = a_{zz}$, $a_{ik} = 0$	$A_{11} = A_{33}$, $A_{ik} = 0$	1 S
2 D_{III}.......	$a_{ii} = 0$, $a_{xy} = a_{yz} = a_{xz}$	$A_{11} = - A_{33}$, $A_{22} = 0$	2 S
		$A_{12} = A_{13} = 0$, $A_{23} \neq 0$	2 A

TABLEAU II.

Oscillations de l'ion.	Tenseur de l'ion [a].	Tenseur du cristal [A].	Raies Raman du cristal.
3 $S_x S_y S_z$....	$a_{xx} \neq a_{yy} \neq a_{zz}$, $a_{ik} = 0$	$A_{11} \neq A_{22} \neq A_{33}$, $A_{ik} = 0$, $A_{12} = A_{23} = 0$	3 S
2 $S_y A_x A_z$...	$a_{xz} \neq 0$ } *tous* les autres termes *nuls*	$A_{11} = - A_{33}$, $A_{22} = A_{ik} = 0$	2 S
2 $S_x A_y A_z$...	$a_{yz} \neq 0$ } *tous* les autres termes *nuls*	$A_{ii} = 0$, $A_{13} = 0$, $A_{12} = - A_{23}$	2 A
2 $S_z A_x A_y$...	$a_{xy} \neq 0$ } *tous* les autres termes *nuls*	$A_{ii} = 0$, $A_{13} = 0$, $A_{12} = - A_{23}$	2 A

être, soit symétriques par rapport aux trois axes ($S_x S_y S_z$), soit symétriques par rapport à l'un d'eux et antisymétriques par rapport aux deux autres. ($S_x A_y A_z$, $S_y A_z A_x$, $S_z A_x A_y$), d'où le tableau II.

Donc en tout, cinq symétriques et quatre antisymétriques. Après avoir identifié les cinq fréquences symétriques, Cabannes [1] avait attribué à l'ion déformé la symétrie D_2.

4° Mais on peut remarquer que toute déformation qui conserve à l'ion un axe binaire parallèle à l'axe binaire du cristal conduit au même résultat : neuf fréquences actives dont cinq symétriques et quatre antisymétriques. Supposons, par exemple, que l'ion possède le type de symétrie C_{2v}, c'est-à-dire qu'on n'y trouve plus qu'un seul axe binaire et deux plans de symétrie passant par cet axe; ces plans de symétrie contiennent les atomes d'oxygène; on peut supposer que les deux autres axes binaires ont disparu parce que deux atomes d'oxygène, tout en restant symétriques par rapport à l'axe binaire, en sont légèrement plus rapprochés que les deux autres. Les lignes neutres de la face de clivage sont toujours sensiblement perpendiculaires aux plans de symétrie de l'ion dont les axes x, y, z (oy, axe binaire; ox et oz, perpendiculaires aux plans de symétrie) se confondent maintenant avec les axes du cristal. Les tenseurs des intensités sont identiques pour l'ion et le cristal; ils ont les formes simples du tableau III.

On remarquera, en comparant les tableaux II et III, qu'aux oscillations symétriques correspondent des tenseurs de formes différentes quand on passe du type D_2 au type C_2.

TABLEAU III.

Oscillations de l'ion.	Tenseur du cristal.	Raies Raman du cristal.
3 $S_1 S_2 S_3$...	$A_{11} \neq A_{22} \neq A_{33}$, $A_{ik} = 0$	3 S
2 $S_2 A_1 A_3$...	$A_{13} \neq 0$ } *t us* les autres termes *nuls*	2 S
2 $S_1 A_2 A_3$...	$A_{23} \neq 0$ } *t us* les autres termes *nuls*	2 A
2 $S_3 A_1 A_2$...	$A_{12} \neq 0$ } *t us* les autres termes *nuls*	2 A

5° Supposons que l'ion possède seulement le type de symétrie C_2, avec son unique axe binaire parallèle à l'axe binaire du cristal; on peut pour cela imaginer que les arêtes perpendiculaires à l'axe, du type de symétrie C_{2v}, ont légèrement tourné autour de cet axe. Aux neuf mouvements propres de l'ion correspondent alors neuf fréquences pour le cristal, cinq symétriques et quatre antisymétriques, dont les tenseurs peuvent avoir la forme la plus générale des tenseurs symétriques ($A_{12} = A_{23} = 0$) et antisymétriques ($A_{ii} = A_{13} = 0$) des cristaux monocliniques.

6° Enfin dans l'hypothèse d'un ion ne possédant plus d'axe binaire, chacune des neuf fréquences propres de l'ion donnera en général pour le cristal, deux fréquences, une symétrique et une antisymétrique, les tenseurs rapportés au cristal pouvant

présenter la forme la plus générale des oscillations symétriques et antisymétriques; donc en tout, dix-huit fréquences, neuf symétriques et neuf antisymétriques.

En résumé, l'*étude complète de la polarisation* des raies Raman d'un cristal doit permettre de trancher entre les types de symétrie D_2, C_2C_{2v} et C_2 qui conduisent cependant au même nombre de fréquences symétriques et antisymétriques pour les mouvements « internes » des ions SO_4^{--}.

Résultats expérimentaux. — Dans un bloc de gypse transparent (1), nous avons taillé, puis

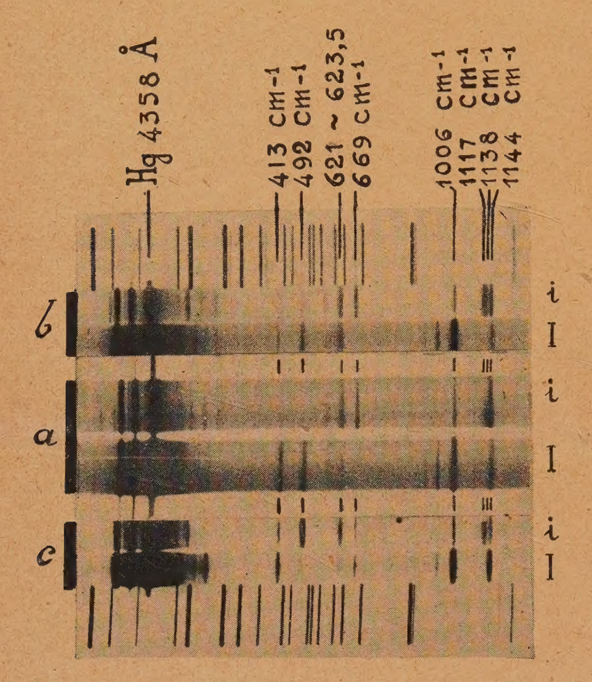


Planche I. — *Raies Raman « internes » des ions* SO_4^{--} *du gypse.*
Excitation par le triplet indigo 436 mμ du mercure; on observe à angle droit du faisceau incident; la vibration *i* est parallèle au rayon incident; la vibration I est perpendiculaire au plan de diffusion.
a, l'axe binaire du cristal est couché sur l'incident; l'axe 1 est couché sur le faisceau diffusé: la lumière incidente est naturelle.
b, le cristal est orienté comme en *a*, mais la vibration incidente est perpendiculaire au plan de diffusion.
c, l'axe binaire du cristal est perpendiculaire au plan de diffusion; l'axe 1 est couché sur le faisceau diffusé; la lumière incidente est naturelle.

poli sur toutes ses faces, un parallélépipède dont les arêtes sont parallèles aux axes de l'ellipsoïde des indices. Nous avons donné au cristal et à la vibration incidente différentes orientations et nous avons séparé par un wollaston, dans la lumière diffusée à angle droit du faisceau incident, la vibration parallèle et la vibration perpendiculaire au plan de diffusion. Ces deux vibrations sont analysées par un spectrographe de luminosité et dispersion moyennes : ouverture de l'objectif $\frac{f}{4,5}$; dispersion de 20 Å au millimètre vers 4500 Å.

Ce montage de polarisation permet non seulement de préciser la forme du tenseur relatif à chaque raie Raman, mais encore il facilite la résolution de bandes multiples. En effet, on peut faire paraître dans deux spectres différents juxtaposés sur la plaque, les composantes dont les tenseurs sont de formes différentes, symétriques et antisymétriques par exemple. Ainsi, couchons l'axe binaire du cristal sur le rayon incident de lumière naturelle; dans la vibration diffusée perpendiculaire au plan de diffusion (vibration I), nous trouvons seulement les raies symétriques, tandis que les raies antisymétriques apparaissent uniquement dans la vibration diffusée parallèle au rayon incident (vibration *i*) (*Pl. I, a*). Mais on peut aussi, en orientant convenablement la vibration incidente, réduire très inégalement les intensités de deux raies voisines et faire paraître une composante faible au voisinage immédiat d'une raie très forte. Par exemple la séparation des deux raies antisymétriques 1117 et 1138 cm⁻¹ n'est facile que si l'on réduit fortement l'intensité de la raie 1138 cm⁻¹. Dans le cliché *b* de la planche I, comme dans le cliché *a*, le cristal a son axe binaire couché sur le rayon incident, mais la vibration incidente est perpendiculaire au plan de diffusion; en comparant les deux clichés *a* et *b*, on voit immédiatement pour ce cas particulier l'intérêt du polariseur sur l'incident.

En définitive, nous avons identifié les neuf raies Raman différentes, cinq symétriques (*S*) et quatre antisymétriques (*A*), prévues par J. Cabannes. En voici les fréquences, en cm^{-1} :

413 (*S*); 492 (*S*); 621 (*S*); 623,5 (*A*); 669 (*A*);
1006 (*S*); 1117 (*A*); 1138 (*A*); 1144 (*S*).

Nos mesures de polarisation peuvent se résumer sous la forme de tableaux donnant pour chaque direction 1, 2, 3, de la vibration incidente, l'intensité de la vibration diffusée suivant chacun des axes 1, 2, 3. (Rappelons que ces axes 1, 2, 3 sont à la fois les arêtes de notre parallélépipède de gypse et les axes de l'ellipsoïde des indices de ce cristal.) (*F*, forte; *m*, moyenne; *f*, faible).

Interprétation des résultats expérimentaux. — Si l'on compare ces résultats expérimentaux aux prévisions théoriques, on voit qu'on ne peut admettre pour l'ion, ni les types de symétrie T_d et S_4^u (comme Cabannes l'avait déjà montré par le simple dénombrement des fréquences symétriques), ni les types de symétrie D_2 et C_{2v}.

(1) Nous remercions notre collègue, M. Laval, Maître de conférences de Minéralogie, qui a mis à notre disposition ce magnifique échantillon de gypse transparent.

413 (S).

	1	2	3
1	F	·	f
2	·	F	·
3	f	·	m

492 (S).

	1	2	3
	·	·	F
	·	m	·
	F	·	F

621 (S).

	1	2	3
	·	·	·
	·	·	·
	·	·	m

623,5 (A).

	1	2	3
	·	·	·
	·	·	F
	·	F	·

669 (A).

	1	2	3
	·	m	·
	m	·	F
	·	F	·

1006 (S).

	1	2	3
1	F	·	·
2	·	F	·
3	·	·	F

1117 (A).

	1	2	3
	·	·	·
	·	·	m
	·	m	·

1138 (A).

	1	2	3
	·	F	·
	F	·	F
	·	F	·

1144 (S).

	1	2	3
	F	·	f
	·	m	·
	f	·	F

En effet, dans le cas de la symétrie D_2, les raies symétriques 413 et 492 cm^{-1}, provenant de la dégénérescence de la fréquence doublement dégénérée du tétraèdre régulier, devraient correspondre à des tenseurs de formes identiques ($A_{11} = -A_{33}$, $A_{12} = A_{ik} = 0$); ce qui n'est pas vérifié par l'expérience ([1]). On peut le prouver immédiatement par le cliché *c* de la planche I, où ces deux raies apparaissent l'une dans *I*, l'autre dans *i*. (L'axe binaire du cristal est perpendiculaire au plan de diffusion, l'axe retardé vers l'observateur; on a éclairé en lumière naturelle.)

L'hypothèse d'une symétrie C_{2v} est à rejeter parce que non seulement les raies symétriques 413 et 492 cm^{-1}, mais encore la forte raie antisymétrique 1138 cm^{-1} ne vérifient pas au point de vue de la polarisation les prévisions théoriques (*voir* Tableau III).

On peut remarquer que, sauf pour les raies de faible intensité (621 et 1117 cm^{-1}), pour lesquelles les tenseurs expérimentaux sont peut-être incomplets, les tenseurs obtenus ont la forme la plus générale des oscillations symétriques et antisymétriques des cristaux monocliniques. Comme aucune des neuf fréquences propres de l'ion n'apparaît à son tour dédoublée par couplage, il faut conclure que les oscillations de l'ion sont déjà symétriques ou antisymétriques par rapport à un axe binaire confondu avec celui du cristal, donc que cet ion possède un axe binaire parallèle à l'axe binaire du cristal. Nous venons de voir qu'on ne peut lui attribuer d'autres éléments de symétrie. *C'est donc qu'il a la symétrie C_2, avec son axe binaire parallèle à l'axe binaire du cristal.*

En résumé, dans le cristal de gypse les forces de couplage modifient la symétrie des ions SO_4^{--}; non seulement, en faisant disparaître tous les axes ternaires, elles suppriment la dégénérescence des fréquences double et triples du tétraèdre régulier, mais encore, d'après les mesures de polarisation des neuf raies Raman internes des ions SO_4^{--}, on doit limiter à un axe binaire parallèle à l'axe du cristal, les éléments de symétrie des ions déformés. Si l'on entend par « déformation de l'ion » un déplacement relatif des positions d'équilibre des atomes d'oxygène, on doit prévoir une déformation assez faible, puisqu'elle n'est pas révélée par l'étude des diagrammes de diffusion des rayons X. Mais même si ces positions moyennes sont très peu modifiées, on ne peut négliger les forces de couplage dans le calcul de l'énergie potentielle de chaque atome oscillant. Or ces forces de couplage n'admettent pas, en général, les éléments de symétrie de l'ion; dans l'expression de l'énergie potentielle totale du système oscillant, où interviennent non seulement les forces internes (dues à l'action des autres atomes de l'ion), mais encore les forces de couplage (dues à l'action des atomes des ions voisins), ne seront conservés comme éléments de symétrie que ceux communs à l'ion et à la maille. Le cas des ions SO_4^{--} où la symétrie du tétraèdre régulier T_d des ions dans les solutions se réduit à la symétrie C_2 (l'axe binaire du cristal) dans les ions déformés du gypse monoclinique, nous a paru particulièrement démonstratif à cet égard.

Manuscrit reçu le 18 décembre 1944.

([1]) J. Cabannes a observé (*C. R. Acad. Sc.*, 1932, **195**, p. 1353) que suivant l'orientation du cristal, les intensités relatives des deux raies symétriques 413 et 492 cm^{-1} sont différentes.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] J. Cabannes, *C. R. Acad. Sc.*, 1932, **195**, p. 1353.
[2] R. Aynard, *C. R. Acad. Sc.*, 1940, **211**, p. 647. — J. Cabannes et R. Aynard, *J. de Physique*, 1942, **3**, p. 137.
[3] A. Kastler et A. Rousset, *J. de Physique*, 1941, **2**, p. 49.
[4] A. Rousset et R. Lochet, *J. de Physique*, 1942, **3**, p. 146.
[5] A. Rousset, J. Laval et R. Lochet, *C. R. Acad. Sc.*, 1943, **216**, p. 886.
[6] *Voir* par exemple K. W. F. Kohlrausch, *Der Smekal-Raman-Effekt, II Ergänzungsband* (*Struktur der Materie, XIX*, Berlin, 1938).
[7] W. A. Wooster, *Z. f. Kristallographie*, 1936, **94**, p. 375.
[8] G. Placzek, *Leipziger Vorträge*, 1931, p. 72.
[9] J. Cabannes, *C. R. Acad. Sc.*, 1940, **211**, p. 625 et p. 750. — B. D. Saksena, *Proc. of the Indian Acad. of Science*, 1940, **11** (A), p. 229.

SUR LA THÉORIE DU CORPUSCULE DE SPIN 1

Par GÉRARD PETIAU.
Institut Henri-Poincaré.

Sommaire. — Exposé de la représentation matricielle de la théorie du corpuscule de spin 1 sous ses aspects de théorie du mésoton scalaire ou vectoriel et de théorie du photon. En particulier la représentation des systèmes de matrice et leur réductibilité est examinée en détail.

Dans une série de mémoires récents, divers auteurs [Kemmer (1), Taub (2), etc.] reprennent, sous le nom de théorie corpusculaire du mésoton, une théorie que j'avais développée dans ma Thèse, en 1936, sans préciser autrement que par son spin la nature du corpuscule auquel s'appliquaient les équations d'ondes introduites. Devant l'intérêt soulevé actuellement par ces questions, il m'a paru intéressant de préciser certains aspects de cette théorie que les auteurs cités plus haut n'examinent que superficiellement.

1. **Principes généraux.** — Nous nous proposons d'étudier le corpuscule dont l'évolution est représentée par les solutions de l'équation d'ondes

$$\Sigma_\mu \partial_\mu \Gamma_\mu \psi = \lambda\psi, \qquad (1)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{h} m_0 c, \qquad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \qquad (\mu = 1, 2, 3, 4;\ x_4 = ict).$$

Les matrices Γ_μ sont des matrices carrées et hermitiques de rang n que nous préciserons plus tard et liées entre elles par les relations

$$\Gamma_\mu \Gamma_\nu \Gamma_\lambda + \Gamma_\lambda \Gamma_\nu \Gamma_\mu = \delta_{\mu\nu} \Gamma_\lambda + \delta_{\nu\lambda} \Gamma_\mu \qquad (2)$$

et seulement par ces relations.

Le fait d'astreindre, en outre, les Γ_μ entre eux à de nouvelles relations supplémentaires particularise la représentation des Γ_μ, ce que nous ne supposons pas réalisé pour l'instant.

Les relations générales (2) sont encore équivalentes au système

$$\left.\begin{aligned} (\Gamma_\mu)^3 = \Gamma_\mu, \qquad \Gamma_\mu \Gamma_\nu \Gamma_\mu = 0, \qquad \Gamma_\mu \Gamma_\nu^2 + \Gamma_\nu^2 \Gamma_\mu = \Gamma_\mu, \\ \Gamma_\mu \Gamma_\nu \Gamma_\lambda + \Gamma_\lambda \Gamma_\nu \Gamma_\mu = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Par suite, les Γ_μ admettent les valeurs propres réelles 0, + 1 et — 1.

La forme d'équation purement relativiste (1) peut se mettre sous la forme usuelle en séparant la variable temporelle si nous pouvons construire, soit une matrice A_0, soit une matrice B_0 possédant chacune une inverse et telles que l'on ait

$$A_0^2 = 1, \qquad A_0 \Gamma_4 = \Gamma_4 A_0, \qquad A_0 \Gamma_p + \Gamma_p A_0 = 0; \qquad (4)$$

$$B_0^2 = 1, \qquad B_0 \Gamma_4 + \Gamma_4 B_0, \qquad B_0 \Gamma_p = \Gamma_p B_p. \qquad (5)$$

La structure des Γ_μ permet de construire aisément A_0 et B_0.

En effet, à partir des Γ_μ^2 nous construisons des matrices C_μ en posant

$$\Gamma_\mu^2 = \frac{1}{2}(1 + C_\mu) \qquad \text{ou} \qquad C_\mu = 2\Gamma_\mu^2 - 1.$$

Les relations (3) montrent alors que

$$\Gamma_\mu = \Gamma_\mu C_\mu = C_\mu \Gamma_\mu, \qquad C_\mu^2 = 1,$$

$$\Gamma_\nu = \Gamma_\nu \Gamma_\mu^2 + \Gamma_\mu^2 \Gamma_\nu = \Gamma_\nu + \frac{1}{2}(\Gamma_\nu C_\mu + C_\mu \Gamma_\nu),$$

d'où

$$\Gamma_\nu C_\mu + C_\mu \Gamma_\nu = 0 \qquad \text{et} \qquad \Gamma_\mu^2 \Gamma_\nu^2 = \Gamma_\nu^2 \Gamma_\mu^2$$

donne

$$C_\mu C_\nu = C_\nu C_\mu.$$

Un produit de trois matrices, soit $C_\mu C_\nu C_\rho$ commute donc avec une matrice Γ_μ, Γ_ν, Γ_ρ et anticommute avec Γ_λ.

On voit alors immédiatement que C_4 possède les propriétés que nous assignons à A_0 et $C_1 C_2 C_3$ les propriétés de B_0.

Nous poserons donc

$$A_0 = C_4, \qquad B_0 = C_1 C_2 C_3.$$

Multipliant l'équation (1) par iA_0 et par B_0 et en posant

$$C_4 \Gamma_4 = \Gamma_4 = A_4, \qquad -iC_4 \Gamma_p = A_p,$$
$$iC_1 C_2 C_3 \Gamma_4 = B_4, \qquad C_1 C_2 C_3 \Gamma_p = B_p,$$

nous obtenons

$$\partial_t A_4 \psi = (\Sigma_p \partial_p A_p + \lambda i A_0)\psi; \qquad (6)$$

$$\partial_t B_4 \psi = (\Sigma_p \partial_p B_p - \lambda B_0)\psi. \qquad (7)$$

(1) *Proc. Roy. Soc.*, Lo don, A, 939, **173**, p. 91-116.
(2) *Annals of Math.*, 1939, **40**, p. 937-947.

On peut voir facilement que les matrices A_μ et B_μ satisfont aux relations déduites de (2)

$$\left.\begin{aligned} A_\mu A_\nu A_\rho + A_\rho A_\nu A_\mu &= \delta_{\mu\nu} A_\rho + \delta_{\nu\rho} A_\mu, \\ B_\mu B_\nu B_\rho + B_\rho B_\nu B_\mu &= \delta_{\mu\nu} B_\rho + \delta_{\nu\rho} B_\mu, \\ A_\mu^2 = \Gamma_\mu^2 = B_\mu^2 &= \frac{1}{2}(1 + C_\mu). \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

L'équation (1) présente l'invariance relativiste, c'est-à-dire que lorsque les axes de coordonnées subissent une transformation de Lorentz, l'équation (1) conserve sa forme dans le second système, si l'on fait subir, en outre, aux ψ une substitution linéaire S.

Posant pour la rotation infinitésimale

$$x'^\mu = x^\mu + \Sigma_\nu \varepsilon_{\mu\nu} x^\nu \qquad (\varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu})$$

et pour la transformation infinitésimale S correspondante

$$\psi'_i = S_{ij}\psi_j = \left(I + \frac{1}{2}\Sigma_{\mu,\nu}\varepsilon_{\mu\nu} T_{\mu\nu}\right)_{ij}\psi_j,$$

un calcul classique montre que l'on doit avoir

$$\Gamma_\lambda T_{\mu\nu} - T_{\mu\nu}\Gamma_\lambda = \delta_{\mu\lambda}\Gamma_\nu - \delta_{\lambda\nu}\Gamma_\mu.$$

Les relations (2) montrent alors que l'on peut prendre pour $T_{\mu\nu}$ l'expression $\Gamma_\mu\Gamma_\nu - \Gamma_\nu\Gamma_\mu$, d'où

$$\psi'_i = \psi_i + \frac{1}{2}\Sigma_{\mu,\nu}\varepsilon_{\mu\nu}(\Gamma_\mu\Gamma_\nu - \Gamma_\nu\Gamma_\mu)_{ij}\psi_j. \quad (9)$$

A partir des équations (6) et (7) et des conjuguées, on peut former deux équations de continuité entre grandeurs quadratiques réelles, soient

$$\partial_t(\psi^* A_4 \psi) = \Sigma_p\, \partial_p(\psi^* A_p \psi), \quad (10)$$

$$\partial_t(\psi^* B_4 \psi) = \Sigma_p\, \partial_p(\psi^* B_p \psi) - \lambda\psi^* B_0 \psi. \quad (11)$$

Si l'on revient aux matrices Γ_μ et si nous définissons un ψ adjoint ou ψ^+ par la relation

$$\psi^+ = i\psi^* A_0 = i\psi^* C_4,$$

l'équation (10) s'écrit encore

$$\Sigma_\mu\, \partial_\mu(\psi^+ \Gamma^\mu \psi) = 0. \quad (12)$$

Cette équation (12) peut être considérée comme résultant de (1) et d'une équation adjointe de (1), que nous écrivons

$$\Sigma_\mu\, \partial_\mu \psi^+ \Gamma^\mu + \lambda\psi^+ = 0. \quad (13)$$

Les matrices Γ_μ en se combinant entre elles, peuvent donner de nouvelles matrices linéairement indépendantes. Ces grandeurs donneront naissance par l'intermédiaire des ψ^+ et des ψ à des densités de valeurs moyennes représentées par des formes quadratiques en ψ^+ et ψ qui représenteront les probabilités des différentes grandeurs physiques de la théorie du corpuscule.

Nous allons examiner ces différentes matrices.

Nous remarquerons d'abord que les produits $\Gamma_\mu\Gamma_\nu$ ne sont ni hermitiques ni antihermitiques. Toutefois, nous pouvons écrire,

$$\Gamma_\mu\Gamma_\nu = \frac{1}{2}(\Gamma_\mu\Gamma_\nu + \Gamma_\nu\Gamma_\mu) + \frac{1}{2}(\Gamma_\mu\Gamma_\nu - \Gamma_\nu\Gamma_\mu).$$

Posant

$$\Gamma_\mu^\nu = \frac{1}{2}(\Gamma_\mu\Gamma_\nu + \Gamma_\nu\Gamma_\mu) = \Gamma_\nu^\mu,$$

$$\Gamma_{\mu\nu} = -\Gamma_{\nu\mu} = \frac{1}{2}(\Gamma_\mu\Gamma_\nu - \Gamma_\nu\Gamma_\mu),$$

on voit que

$$(\Gamma_\mu^\nu)^3 = \Gamma_\mu^\nu \qquad \text{et que} \qquad (\Gamma_{\mu\nu})^3 = -\Gamma_{\mu\nu};$$

Γ_ν^μ est donc hermitique, tandis que $\Gamma_{\mu\nu}$ est antihermitique.

De même, on voit que les produits de trois matrices $\Gamma_\mu\Gamma_\nu\Gamma_\rho$, tels que $(\Gamma_\mu\Gamma_\nu\Gamma_\rho)^3 = -\Gamma_\mu\Gamma_\nu\Gamma_\rho$, sont antihermitiques. Le produit des quatre matrices $\Gamma_\mu\Gamma_\nu\Gamma_\rho\Gamma_\lambda$ n'a pas de propriétés d'hermiticité définie, mais les relations (3) montrent que

$$\Gamma_\mu\Gamma_\nu\Gamma_\rho\Gamma_\lambda = -\Gamma_\rho\Gamma_\nu\Gamma_\mu\Gamma_\lambda = \Gamma_\rho\Gamma_\lambda\Gamma_\mu\Gamma_\nu = -\Gamma_\mu\Gamma_\lambda\Gamma_\rho\Gamma_\nu,$$

d'où l'on déduit l'existence de six produits indépendants

$$\Gamma_\mu\Gamma_\nu\Gamma_\rho\Gamma_\lambda;\quad \Gamma_\lambda\Gamma_\mu\Gamma_\nu\Gamma_\rho;\quad \Gamma_\nu\Gamma_\rho\Gamma_\mu\Gamma_\lambda;$$

$$\Gamma_\lambda\Gamma_\nu\Gamma_\rho\Gamma_\mu;\quad \Gamma_\rho\Gamma_\mu\Gamma_\nu\Gamma_\lambda;\quad \Gamma_\lambda\Gamma_\rho\Gamma_\mu\Gamma_\nu.$$

Ces grandeurs se séparent alors en deux groupes en posant

$$s_{\mu\rho}^{\nu\lambda} = \frac{1}{2}(\Gamma_\mu\Gamma_\nu\Gamma_\rho\Gamma_\lambda + \Gamma_\lambda\Gamma_\mu\Gamma_\nu\Gamma_\rho),$$

$$t_{\mu\rho,\nu\lambda} = \frac{1}{2}(\Gamma_\mu\Gamma_\nu\Gamma_\rho\Gamma_\lambda - \Gamma_\lambda\Gamma_\mu\Gamma_\nu\Gamma_\rho).$$

Les six grandeurs indépendantes s'écrivent alors

$$s_{\mu\rho}^{\nu\lambda};\quad s_{\nu\mu}^{\rho\lambda};\quad s_{\rho\nu}^{\mu\lambda};\quad t_{\mu\rho,\nu\lambda};\quad t_{\nu\mu,\rho\lambda};\quad t_{\rho\nu,\mu\lambda}.$$

Nous avons donc obtenu, par combinaison de Γ_μ, quatre Γ_μ, six $\Gamma_{\mu\nu}$, six Γ_μ^ν, douze $\Gamma_\mu\Gamma_\nu\Gamma_\rho$, trois $s_{\mu\rho}^{\nu\lambda}$, trois $t_{\mu\rho,\nu\lambda}$.

De même, si nous considérons les combinaisons des C_μ et de Γ_μ, nous avons, à partir de quatre C_μ (définis par Γ_μ^2), six $C_\mu C_\nu$, trois $C_\mu C_\nu C_\rho$, un $C_\mu C_\nu C_\rho C_\lambda$ et, avec les Γ_μ, douze $C_\mu\Gamma_\nu$ antihermitiques, douze $C_\mu C_\nu\Gamma_\rho$ hermitiques, quatre $C_\mu C_\nu C_\rho\Gamma_\lambda$ antihermitiques.

Les produits de C_μ par Γ_μ^ν ou $\Gamma_{\mu\nu}$ ne donnent pas de combinaisons nouvelles, car $C_\mu\Gamma_\mu^\nu = \Gamma_{\mu\nu}$ et $C_\mu\Gamma_{\mu\nu} = \Gamma_\mu^\nu$. Seuls sont nouveaux les produits

$$C_\lambda\Gamma_\mu^\nu \ (\text{douze}), \qquad C_\lambda\Gamma_{\mu\nu} \ (\text{douze});$$

$$C_\lambda C_\rho\Gamma_\mu^\nu \ (\text{six}), \qquad C_\lambda C_\rho\Gamma_{\mu\nu} \ (\text{six}).$$

De même, nous obtenons douze $C_\lambda\Gamma_\mu\Gamma_\nu\Gamma_\rho$ indépendants. Quant aux $s_{\mu\nu}^{\rho\lambda}$ et $t_{\mu\nu}^{\rho\lambda}$, leurs produits, par les C_μ, n'introduisent pas de grandeurs nouvelles.

On voit ainsi que l'on obtient 126 matrices linéairement indépendantes représentant les grandeurs physiques de la théorie du corpuscule.

La connaissance de ce nombre nous permettra tout à l'heure de discuter les représentations des matrices .

Nous allons maintenant examiner comment les ondes ψ satisfont à l'équation de propagation des ondes du second ordre.

Si nous multiplions l'équation (1) où

$$\Sigma_\mu \partial_\mu \Gamma_\mu \psi = \lambda\psi$$

par l'opérateur

$$\partial_\mu(1-\Gamma_\mu^2),$$

nous obtenons facilement

$$\partial_\mu(1-\Gamma_\mu^2)\psi = \Big(\sum_{\nu\neq\mu} \partial_\nu \Gamma_\nu \Gamma_\mu\Big)\psi.$$

D'autre part,

$$\partial_\mu \Gamma_\mu^2 \psi = -(\Sigma_\nu \partial_\nu \Gamma_\mu \Gamma_\nu)\psi + \lambda\Gamma_\mu\psi,$$

d'où, par addition,

$$\partial_\mu \psi = \Sigma_\nu \partial_\nu(\Gamma_\nu\Gamma_\mu - \Gamma_\mu\Gamma_\nu)\psi + \lambda\Gamma_\mu\psi \qquad (\alpha)$$

et par soustraction

$$\partial_\mu(1-2\Gamma_\mu^2)\psi = \Sigma_\nu \partial_\nu(\Gamma_\nu\Gamma_\mu + \Gamma_\mu\Gamma_\nu)\psi - \lambda\Gamma_\mu\psi. \qquad (\beta)$$

L'équation (α) nous donne immédiatement, en appliquant l'opérateur ∂_μ et en sommant sur μ,

$$\Sigma_\mu \partial_\mu^2 \psi = \lambda^2\psi.$$

L'onde ψ satisfait donc bien à l'équation de propagation des ondes du second ordre.

En introduisant les matrices A_4, A_p et $A_0 = 2\Gamma_4^2 - 1$, l'équation (β) s'écrit

$$\partial_t \psi = [\Sigma_p \partial_p(A_p A_4 + A_4 A_p) + \lambda i A_4]\psi. \qquad (14)$$

Sous cette forme, on retrouve un opérateur hamiltonien pour le corpuscule. Toutefois, l'équation (14) considérée seule n'est pas équivalente à (1).

Écrivant (11) sous la forme

$$\partial_t \psi = \mathcal{H}\psi, \qquad (15)$$

une grandeur représentée par l'opérateur C sera intégrale première si l'on a

$$\dot{C} = C\mathcal{H} - \mathcal{H}C = 0.$$

Cette définition de l'intégrale première nous permet de déterminer la matrice représentative de la grandeur spin du corpuscule. Celui-ci sera représenté par une matrice S_{pq} telle que

$$(A_r A_4 + A_4 A_r)S_{pq} - S_{pq}(A_r A_4 + A_4 A_r)$$
$$= \frac{h}{2\pi i}\delta_{rq}(A_p A_4 + A_4 A_p) - \frac{h}{2\pi i}\delta_{rp}(A_q A_4 + A_4 A_q).$$

On trouve alors immédiatement la solution

$$S_{pq} = \frac{h}{2\pi} i(A_p A_q - A_q A_p), \qquad (16)$$

qui correspond au spin dans la direction r (indices d'espaces dans l'ordre p, q, r) et dont les valeurs propres sont

$$0, \quad +\frac{h}{2\pi}, \quad -\frac{h}{2\pi}.$$

Posant

$$S_z = \frac{h}{2\pi} i(A_1 A_2 - A_2 A_1),$$

on peut considérer l'opérateur correspondant au spin total

$$\vec{S} = e_1 S_x + e_2 S_y + e_3 S_z \qquad (e_i e_j = \delta_{ij}),$$

d'où

$$|\vec{S}|^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2.$$

Nous en tirons

$$|\vec{S}|^2 = \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 \Sigma_{(ij)}(A_i A_j - A_j A_i)^2.$$

Or, on a

$$(A_i A_j - A_j A_i)^2 = A_i^2 + A_j^2 - 2A_i^2 A_j^2 = \frac{1}{2}(1 - C_i C_j),$$

d'où

$$|\vec{S}|^2 = \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{2}[3 - \Sigma_{(ij)} C_i C_j]$$

et

$$|\vec{S}|^4 = \left(\frac{h}{2\pi}\right)^4 [3 - \Sigma_{(ij)} C_i C_j] = \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 2|\vec{S}|^2. \qquad (17)$$

L'opérateur $|\vec{S}|^2$ satisfaisant à l'équation caractéristique

$$|\vec{S}|^4 - \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 2|\vec{S}|^2 = 0$$

possède donc les deux valeurs propres zéro et

$$2\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 = 1(1+1)\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2. \qquad (18)$$

Ces valeurs propres des opérateurs de spin total et de spin dans la direction Oz nous permettent de considérer l'équation d'ondes comme correspondant à un corpuscule de spin zéro et $\pm\frac{h}{2\pi}$.

Les représentations des matrices Γ_μ. — Nous avons vu que les Γ_μ, par leurs combinaisons, donnaient naissance à un système de 126 matrices linéairement indépendantes.

Afin d'examiner les différentes représentations de ce système, nous appliquerons le lemme de Schur : une matrice, qui commute avec toutes les matrices d'une représentation irréductible d'un groupe G, est nécessairement multiple de la matrice unité. Si elle relie deux représentations irréductibles non équivalentes, elle est nulle.

Nous sommes donc conduit à chercher les matrices qui commutent avec les 126 matrices obtenues précédemment.

On voit facilement qu'une telle matrice ne peut être qu'une combinaison symétrique des C_μ, et il

suffit qu'elle commute avec l'un des Γ_μ pour commuter avec l'ensemble des matrices du système.

Nous chercherons donc cette matrice sous la forme

$$S = a_1 \Sigma_\mu C_\mu + a_2 \Sigma_{\mu\nu} C_{\mu\nu} + a_3 \Sigma_\mu C_{\mu 5} + a_4 C_5$$
$$(C_{\mu 5} = C_{\nu\rho\lambda},\ C_5 = C_\mu C_\nu C_\rho C_\lambda).$$

Nous avons alors

$$\Gamma_\mu S - S\Gamma_\mu = 2(a_1 + a_2)(\Sigma_\nu \Gamma_\mu C_\nu) + 2(a_3 + a_4)\Gamma_\mu C_5 = 0,$$

d'où

$$a_1 + a_2 = 0, \qquad a_3 + a_4 = 0$$

et

$$S = a[\Sigma_\mu C_\mu - \Sigma_{(\mu\nu)} C_{\mu\nu}] + b(C_5 - \Sigma_\mu C_{\mu 5}), \quad (19)$$

a et b étant deux constantes arbitraires.

Pour appliquer le lemme de Schur, il nous faut chercher les valeurs propres de cette matrice.

Elles correspondent aux valeurs propres simultanées des deux matrices

$$\left.\begin{aligned} A &= \Sigma_\mu C_\mu - \Sigma_{(\mu\nu)} C_{\mu\nu}, \\ B &= C_5 - \Sigma_\mu C_{\mu 5} = C_5(1 - \Sigma_\mu C_\mu). \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Or, les matrices A et B ne sont pas indépendantes. On voit facilement que

$$B^2 = (1 - \Sigma_\mu C_\mu)^2 = 5 - 2(\Sigma_\mu C_\mu - \Sigma_{\mu\nu} C_{\mu\nu}) = 5 - 2A$$

et

$$AB = 3[\Sigma_\mu C_\mu - \Sigma_{(\mu\nu)} C_{\mu\nu}] - 4C_5(1 - \Sigma_\mu C_\mu)$$

où

$$AB = 3A - 4B.$$

On en tire, pour B, l'équation caractéristique

$$B^3 - 3B^2 - 13B + 15 = 0,$$

dont les racines sont

$$\lambda_2 = 1, \qquad \lambda_2 = 5, \qquad \lambda_2 = -3,$$

λ_1 et λ_2 étant les valeurs propres de A et de B, on a ainsi les trois couples

$$1^\circ \begin{cases} \lambda_1 = 2, \\ \lambda_2 = 1; \end{cases} \quad 2^\circ \begin{cases} \lambda_1 = -2, \\ \lambda_2 = -3; \end{cases} \quad 3^\circ \begin{cases} \lambda_1 = -10, \\ \lambda_2 = 5. \end{cases} \quad (21)$$

En égalant A et B à ces couples de valeurs, on obtiendra de nouvelles relations entre matrices qui réduiront le nombre des grandeurs indépendantes dans les 126 précédentes suivant la représentation irréductible considérée.

La relation

$$B = C_5(1 - \Sigma_\mu C_\mu) = \lambda_2,$$

multipliée par $\Gamma_\mu \Gamma_\nu \Gamma_\rho$, donne facilement

$$\Gamma_\mu \Gamma_\nu \Gamma_\rho = \lambda_2 \Gamma_\mu \Gamma_\nu \Gamma_\rho,$$

d'où, si $\lambda_2 \neq 1$, $\Gamma_\mu \Gamma_\nu \Gamma_\rho = 0$, relation qui existera par suite dans les deuxième et troisième cas.

De même, la relation

$$A = \Sigma_\mu C_\mu - \Sigma_{(\mu\nu)} C_\mu C_\nu = \lambda_1$$

donne

$$(R) \quad \begin{aligned} \lambda_1 C_\mu \Gamma_\lambda &= C_\mu \Gamma_\lambda - C_\nu \Gamma_\lambda - C_\rho \Gamma_\lambda - C_\mu C_\nu C_\rho \Gamma_\lambda, \\ \lambda_1 C_\nu \Gamma_\lambda &= C_\nu \Gamma_\lambda - C_\mu \Gamma_\lambda - C_\rho \Gamma_\lambda - C_\mu C_\nu C_\rho \Gamma_\lambda, \end{aligned}$$

d'où l'on tire, par soustraction,

$$\lambda_1(C_\mu \Gamma_\lambda - C_\nu \Gamma_\lambda) = 2(C_\mu \Gamma_\lambda - C_\nu \Gamma_\lambda).$$

Par suite, si λ_1 est différent de 2, l'on aura

$$C_\mu \Gamma_\lambda = C_\nu \Gamma_\lambda.$$

λ_1 n'étant pas égal à 2, cette dernière relation, transportée dans (R), donne

$$(\lambda_1 + 1) C_\mu \Gamma_\lambda = - C_\mu C_\nu C_\rho \Gamma_\lambda = - C_\mu \Gamma_\lambda$$

ou

$$(\lambda_1 + 2) C_\mu \Gamma_\lambda = 0,$$

d'où, si $\lambda_1 + 2$ n'est pas nul,

$$C_\nu \Gamma_\lambda = 0 \qquad \text{et} \qquad \Gamma_\lambda = 0.$$

Nous voyons alors que le troisième cas, $\lambda_1 = -10$, $\lambda_2 = 5$ donne $\Gamma_\lambda = 0$, la représentation irréductible se réduit à la matrice unité.

Dans le second cas, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$, nous avons les relations

$$\Gamma_\mu \Gamma_\nu \Gamma_\rho = 0, \qquad C_\nu \Gamma_\mu = C_\rho \Gamma_\mu = C_\lambda \Gamma_\mu, \quad (22)$$

qui réduisent de 126 à 25 les matrices linéairement indépendantes non nulles formées par combinaisons des Γ_μ.

Dans le premier cas, les seules restrictions introduites résultent des relations

$$\left.\begin{aligned} \Sigma_\mu C_\mu - \Sigma_{\mu\nu} C_\mu C_\nu &= 2, \\ C_\mu C_\nu C_\rho C_\lambda (1 - \Sigma_\mu C_\mu) &= 1, \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

qui nous donnent, en outre

$$\left.\begin{aligned} C_\mu C_\nu C_\rho \Gamma_\lambda &= - \Sigma_\nu C_\nu \Gamma_\lambda \quad (4), \\ C_\mu C_\nu \Gamma_\rho \Gamma_\lambda &= C_\mu \Gamma_\rho \Gamma_\lambda + C_\nu \Gamma_\rho \Gamma_\lambda - \Gamma_\rho \Gamma_\lambda \quad (12), \\ C_\mu C_\nu \Gamma_\rho + C_\mu C_\lambda \Gamma_\rho + C_\nu C_\lambda \Gamma_\rho &= - \Gamma_\rho \quad (4), \\ C_p C_q C_4 &= C_r - (C_r C_p + C_r C_q + C_r C_4 + 1) \quad (3), \\ C_p C_q C_r &= C_4 - (C_p C_4 + C_q C_4 + C_r C_4 + 1) \quad (1), \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

soient 26 relations réduisant à 100 le nombre des matrices linéairement indépendantes.

Nous voyons donc que la théorie du corpuscule de spin 1 peut se développer au moyen de deux représentations irréductibles de rang 10 et 5, la représentation singulière de rang 1 étant écartée.

Étude de la représentation du cinquième rang (mésoton scalaire). — Nous avons établi qu'il existait une représentation de la théorie du cinquième rang sans faire intervenir explicitement aucune hypothèse sur la nature des ψ. Nous allons chercher à préciser la représentation dans l'hypothèse où ces cinq grandeurs représentent les quatre composantes d'un vecteur d'espace-temps et un invariant.

Dans la transformation de Lorentz représentée par

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \Sigma_{\nu}\omega_{\mu\nu}x^{\nu} \qquad (\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}),$$

nous avons vu que la forme de l'équation d'ondes se conservait en faisant subir, aux ψ, la substitution linéaire

$$S = I + \Sigma_{(\mu\nu)}\omega_{\mu\nu}T_{\mu\nu} \qquad (T_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu}\Gamma_{\nu} - \Gamma_{\nu}\Gamma_{\mu}). \quad (25)$$

Désignant par ψ_0 l'onde invariante, par ψ_{μ} (ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4) les ondes composantes d'un vecteur, nous avons, dans une transformation de Lorentz,

$$\left.\begin{aligned} \psi'_0 &= \psi_0, \\ \psi'_{\mu} &= \psi_{\mu} + \Sigma_{\nu}\omega_{\mu\nu}\psi_{\nu} = \psi_{\mu} + \Sigma_{\nu}\omega_{\mu\nu}(e^{\mu,\nu})_{\mu\rho}\psi_{\rho}, \\ \psi'_{\nu} &= \psi_{\nu} - \Sigma_{\nu}\omega_{\mu\nu}\psi_{\nu} = \psi_{\nu} + \Sigma_{\nu}\omega_{\mu\nu}(-e^{\nu,\mu})_{\nu\rho}\psi_{\rho}. \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Ces relations (26) sont équivalentes à (25) en les écrivant

$$\psi'_i = \psi_i + \Sigma_{(\mu\nu)}\omega_{\mu\nu}(e^{\mu,\nu} - e^{\nu,\mu})_{ij}\psi_j.$$

Par identification, on est conduit à écrire

$$\Gamma_{\mu}\Gamma_{\nu} - \Gamma_{\nu}\Gamma_{\mu} = e^{\mu,\nu} - e^{\nu,\mu}.$$

On aperçoit alors immédiatement une solution, soit

$$\Gamma_{\mu} = e^{\mu,0} + e^{0,\mu} \quad (27)$$

et

$$C_{\mu} = 2\Gamma_{\mu}^2 - 1 = e^{0,0} + e^{\mu,\mu} - \sum_{\nu \neq \mu} e^{\nu,\nu}.$$

En particulier

$$C_4 = e^{0,0} + e^{4,4} - \Sigma_p e^{p,p}.$$

Les grandeurs non nulles de la théorie du corpuscule se réduisent alors aux 25 grandeurs

	1	invariant
quatre	Γ_{μ}	vecteur
quatre	$C_{\mu} = e^{0,0} + e^{\mu,\mu} - \Sigma_{\nu} e^{\nu,\nu}$	tenseur sym. du
six	$\Gamma_{\mu}\Gamma_{\nu} + \Gamma_{\nu}\Gamma_{\mu} = e^{\mu,\nu} + e^{\nu,\mu}$	second ordre,
six	$i(\Gamma_{\mu}\Gamma_{\nu} - \Gamma_{\nu}\Gamma_{\mu}) = i(e^{\mu,\nu} - e^{\nu,\mu})$	tenseur antisym. du sec. ordre,
quatre	$T_{\mu} = iC_{\nu}A_{\mu} = i(e^{0,\mu} - e^{\mu,0})$	vecteur.

On vérifie facilement que l'on a bien entre matrices les relations

$$\Gamma^{\mu}\Gamma^{\nu}\Gamma^{\rho} = 0, \qquad C_{\mu}\Gamma_{\nu} = C_{\rho}\Gamma_{\nu} = C_{\lambda}\Gamma_{\nu},$$

que nous avons obtenues précédemment.

Les équations du corpuscule que nous écrivons

$$\partial_{\mu}(e^{\mu,0} + e^{0,\mu})_{ij}\psi_j = \lambda\psi_i \quad (28)$$

se développent suivant

$$\partial_{\mu}\psi_0 = \lambda\psi_{\mu}, \qquad \Sigma_{\mu}\partial_{\mu}\psi^{\mu} = \lambda\psi_0. \quad (29)$$

Si l'on pose

$$A^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\psi^{\mu}, \qquad A_0 = \sqrt{\lambda}\psi_0,$$

on obtient

$$\partial_{\mu}A_0 = A^{\mu}, \qquad \Sigma_{\mu}\partial_{\mu}A^{\mu} = \lambda^2 A_0.$$

Sous cette forme, on retrouve le premier type d'équation d'ondes de Proca (3) ou équation d'ondes du mésoton scalaire.

L'équation (28), multipliée à gauche par l'opérateur

$$R = \Sigma_p\partial_p(\Gamma_q\Gamma_r - \Gamma_r\Gamma_q) = \Sigma_p\partial_p(e^{q,r} - e^{r,q}),$$

nous donne

$$R\psi = 0. \quad (30)$$

D'autre part, nous avons, en faisant $\mu = 4$ dans l'équation (α),

$$\partial_4\psi = [\Sigma_p\partial_p(e^{p,4} - e^{4,p}) + \lambda(e^{4,0} + e^{0,4})]\psi. \quad (31)$$

(30) et (31) se développent alors suivant

$$\left.\begin{aligned} \partial_p\psi^r - \partial_r\psi^p &= 0, \\ \partial_q\psi^p - \partial_p\psi^q &= 0, \\ \partial_r\psi^q - \partial_q\psi^r &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (30')$$

$$\partial_4\psi^p = \partial_p\psi^4, \qquad \partial_4\psi^q = \partial_q\psi^4, \qquad \partial_4\psi^r = \partial_r\psi^4. \quad (31')$$

Nous obtenons ainsi un double système d'équations, conséquences de l'équation (28).

Nous avons vu précédemment que la grandeur spin était représentée par la densité

$$\mathcal{S} = \frac{h}{2\pi}\psi^* i(A^pA^q - A^qA^p)\psi$$
$$= \frac{h}{2\pi}\psi^+ C^4(\Gamma^p\Gamma^q - \Gamma^q\Gamma^p)\psi.$$

La matrice $S^{pq} = i[e^{pq} - e^{pq}]$ a encore les valeurs propres 0, +1, −1.

Si nous considérons les solutions ondes planes de la forme

$$\mathcal{A}_i e^{i(p_{\mu}x_{\mu})}, \quad \mathcal{A}_i^+ e^{-i(p_{\mu}x^{\mu})},$$

$$\left(\Sigma_{\mu}p_{\mu}^2 = -\lambda^2, \qquad p_4 = i\frac{2\pi}{h}\frac{W}{c}, \qquad x_4 = ict\right).$$

Les systèmes d'équations

$$\partial_{\mu}\Gamma^{\mu}\psi = \lambda\psi, \qquad \partial_{\mu}\psi^+\Gamma^{\mu} = -\lambda\psi^+$$

donnent

$$\mathcal{A}^{\mu} = \frac{ip_{\mu}}{\lambda}\mathcal{A}_0, \qquad \mathcal{A}^{\mu+} = \frac{ip_{\mu}}{\lambda}\mathcal{A}_0^+,$$

d'où

$$\mathcal{S} = -\frac{h}{2\pi}(\psi_p^+\psi_q - \psi_q^+\psi_p) = \mathcal{A}_0^+\mathcal{A}_0(p_pp_q - p_qp_p) = 0.$$

On voit ainsi que, dans l'onde plane, les densités de valeur moyenne du spin sont nulles, quoique les valeurs propres de la matrice de spin ne soient pas nulles.

On peut donc considérer cette représentation du corpuscule comme caractérisant plus particulièrement un corpuscule de spin zéro.

Étude de la représentation du dixième rang (théorie de Proca). — Nous allons chercher main-

(3) *Journ. de Phys.*, 1936, **7**, p. 347.

tenant à préciser la représentation du dixième rang de notre corpuscule en fixant une variance tensorielle aux fonctions d'ondes. *A priori*, nous pouvons chercher si les 10 fonctions d'ondes peuvent se répartir entre les quatre composantes d'un vecteur et les six composantes d'un tenseur du second ordre.

Partant de l'hypothèse que les fonctions d'ondes possèdent ces variances, nous allons montrer que l'on peut en déduire une représentation des matrices Γ_μ satisfaisant à l'ensemble des relations que nous avons établies entre les matrices de la représentation du dixième rang.

Les composantes d'un tenseur du second ordre $\psi_{\mu\nu}$ se transforment dans la transformation de Lorentz

$$x'_\mu = x_\mu + \Sigma_\nu \omega_{\mu\nu} x_\nu$$

suivant

$$\psi'_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} + \Sigma_\rho (\omega_{\mu\rho}\psi_{\rho\nu} + \omega_{\nu\rho}\psi_{\mu\rho}). \tag{31}$$

Si le tenseur est antisymétrique, cette transformation s'écrit encore, en séparant les transformations subies par les composantes de temps $p\,4$ de celles subies par les composantes d'espace pq ($p,q,r = 1, 2, 3$)

$$\psi'_{p4} = \psi_{p4} + \omega_{pq}\psi_{q4} - \omega_{rp}\psi_{r4} - \omega_{q4}\psi_{pq} + \omega_{r4}\psi_{rp},$$
$$\psi'_{pq} = \psi_{pq} + \omega_{rp}\psi_{qr} - \omega_{qr}\psi_{rp} - \omega_{p4}\psi_{q4} + \omega_{q4}\psi_{p4}.$$

Relations qui s'écrivent encore en introduisant des matrices $e^{\mu,\nu}$, $(e^{\mu,\nu}e^{\rho,\lambda} = \delta_{\nu\rho}e^{\mu,\lambda})$:

$$\left.\begin{aligned} \psi'_{p4} &= \psi_{p4} + (\omega_{pq}e^{p4,q4} - \omega_{rp}e^{p4,r4} \\ &\qquad + \omega_{r4}e^{p4,rp} - \omega_{q4}e^{p4,pq})\psi, \\ \psi'_{pq} &= \psi_{pq} + (\omega_{rp}e^{pq,qr} - \omega_{qr}e^{pq,rp} \\ &\qquad + \omega_{q4}e^{pq,p4} - \omega_{p4}e^{pq,q4})\psi. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

De même, les transformations subies par les composantes d'un vecteur s'écrivent

$$\left.\begin{aligned} \psi'_p &= \psi_p + (\omega_{pq}e^{p,q} - \omega_{rp}e^{p,r} + \omega_{p4}e^{p,4})\psi, \\ \psi'_4 &= \psi_4 - (\omega_{p4}e^{4,p} + \omega_{q4}e^{4,q} + \omega_{r4}e^{4,r})\psi. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Si l'on considère maintenant l'ensemble de ψ'_i, on peut l'écrire

$$\psi'_i = \psi_i + [\Sigma_{(pq)}\omega_{(pq)}S_{(pq)} + \Sigma_{(p4)}\omega_{p4}S_{(p4)}]_{ij}\psi_j.$$

Rassemblant, dans les expressions (32) et (33) les coefficients de ω_{pq} et de ω_{p4}, on obtient

$$S_{(pq)} = e^{p4,q4} - e^{q4,p4} + e^{qr,rp} - e^{rp,qr} + e^{p,q} - e^{q,p},$$
$$S_{(p4)} = e^{q4,pq} - e^{r4,rp} + e^{rp,r4} - e^{pq,q4} + e^{p,4} - e^{4,p}.$$

Identifiant alors avec

$$S = I + \Sigma_{(\mu\nu)}\omega_{(\mu\nu)}(\Gamma_\mu\Gamma_\nu - \Gamma_\nu\Gamma_\mu),$$

on est amené à poser

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_p\Gamma_q - \Gamma_q\Gamma_p &= (e^{p4,q4} - e^{q4,p4} + e^{qr,rp} \\ &\qquad - e^{rp,qr} + e^{p,q} - e^{q,p}), \\ \Gamma_p\Gamma_4 - \Gamma_4\Gamma_p &= (e^{q4,pq} - e^{pq,q4} + e^{rp,r4} \\ &\qquad - e^{r4,rp} + e^{p,4} - e^{4,p}). \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Connaissant les expressions de T_{pq} et de T_{p4}, la relation

$$\Gamma_\rho T_{\mu\nu} - T_{\mu\nu}\Gamma_\rho = \Gamma_\nu\delta_{\mu\rho} - \Gamma_\mu\delta_{\rho\nu}$$

nous permet de trouver les Γ_μ.

Si nous prenons, par exemple,

$$\Gamma_4 = e^{p,p4} + e^{q,q4} + e^{r,r4} + e^{r4,r} + e^{q4,q} + e^{p4,p}, \tag{35}$$

nous avons, à partir de

$$\Gamma_4 T_{p4} - T_{p4}\Gamma_4 = -\Gamma_p,$$

$$\Gamma_p = e^{r,rp} + e^{rp,r} - (e^{q,pq} + e^{pq,q}) - (e^{p4,4} + e^{4,p4}). \tag{36}$$

Réciproquement, cette expression nous redonne Γ_4 par

$$\Gamma_p T_{p4} - T_{p4}\Gamma_p = \Gamma_4.$$

Nous avons ainsi, en (35) et (36), des expressions pour les matrices Γ_p, Γ_4. Nous allons montrer que ces matrices satisfont aux relations établies précédemment.

Pour cela, nous remarquerons que l'on peut écrire

$$\Gamma_\mu = \alpha_\mu + \alpha_\mu^+$$

(le signe + indique la matrice transposée) en posant

$$\alpha_p = e^{r,rp} - e^{q,pq} - e^{4,p4},$$
$$\alpha_4 = e^{p,p4} + e^{q,q4} + e^{r,r4},$$

les relations suivantes liant les α_μ et α_ν

$$\alpha_\mu\alpha_\nu = 0, \qquad \alpha_\mu^+\alpha_\nu^+ = 0,$$
$$\alpha_\mu\alpha_\nu^+\alpha_\rho + \alpha_\rho\alpha_\nu^+\alpha_\mu = \delta_{\mu\nu}\alpha_\rho + \delta_{\nu\rho}\alpha_\mu,$$

on voit alors facilement que ces relations entraînent les relations (2).

Un calcul facile montre également que l'on a bien

$$\Sigma_\mu C_\mu - \Sigma_{\mu\nu} C_\mu C_\nu = 2,$$
$$C_p C_q C_r C_4 (1 - \Sigma_\mu C_\mu) = 1.$$

Nous avons donc bien établi ainsi une représentation correspondant au cas cherché.

Si nous reportons les expressions (35) et (36) des Γ_μ dans l'équation (1), celle-ci se développe suivant

$$\partial_\nu\psi_\mu - \partial_\mu\psi_\nu = \lambda\psi_{\mu\nu}, \qquad \Sigma_\nu \partial^\nu\psi_{\mu\nu} = \lambda\psi_\mu. \tag{37}$$

Si l'on pose

$$\psi^\mu = \sqrt{\lambda}A^\mu, \qquad \psi^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\varphi_{\mu\nu},$$

ces équations s'écrivent encore

$$\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu = \varphi_{\mu\nu}, \qquad \Sigma_\nu \partial^\nu\varphi_{\mu\nu} = \lambda^2 A_\mu. \tag{38}$$

On reconnaît ici les équations de Maxwell, complétées du second membre liant les champs aux potentiels et qui sont la forme proposée par Proca et Kemmer pour représenter les équations d'ondes du mésoton.

En plus de ces équations, les ψ satisfont à des équations complémentaires.

Nous avons vu, en effet, que ψ satisfaisait au

système

$$\partial_4(1-\Gamma_4^2)\psi = (\Sigma_p\, \partial_p \Gamma_p \Gamma_4)\psi,$$

ce qui s'écrit encore

$$\partial_4(e^{4,4}+e^{pq,pq}+e^{qr,qr}+e^{rp,rp})\psi$$
$$=\Sigma_p\, \partial_p(e^{rp,r4}-e^{pq,q4}-e^{4,p})\psi,$$

et qui se développe suivant

$$\partial_4 \psi^4 + \Sigma_p\, \partial_p \psi^p = 0, \qquad \partial_4 \psi^{pq} + \partial_p \psi^{q4} - \partial_q \psi^{p4} = 0,$$

d'où quatre équations supplémentaires auxquelles s'ajoute l'équation

$$\Sigma_r\, \partial_r \psi^{pq} = 0,$$

obtenue en appliquant à (1) l'opération

$$\Sigma_r\, \partial_r e^{pq,pq}.$$

La matrice de spin S_{pq} se représente ici par

$$S^{pq} = i[(e^{p4,q4}-e^{q4,r4})-(e^{qr,rp}-e^{rp,qr})+(e^{p,q}-e^{q,p})]$$

et la matrice de spin total par

$$\left|\vec{S}\right|^2 = 2[\Sigma_p\, e^{p,p}+\Sigma_p\, e^{p4,p4}+\Sigma_{(pq)} e^{pq,pq}]. \qquad (39)$$

On voit alors immédiatement que l'on a

$$\left|\vec{S}\right|^2_{ik}\psi_k = 2\psi_i \qquad (40)$$

pour tous les ψ_i, sauf pour ψ_4 pour lequel

$$\left|\vec{S}\right|^2_{4k}\psi_k = 0.$$

Toutes les ondes, sauf ψ_4, correspondent donc à un spin total $\pm \frac{2\pi}{h}$, l'onde ψ_4 correspondant à une onde de spin total nul. ψ_4 représente ici le potentiel scalaire. Nous retrouvons ainsi un résultat établi par M. Louis de Broglie dans sa théorie du photon. Il en résulte que l'onde de spin total nul ne peut s'éliminer que dans un repère particulier pour lequel le potentiel scalaire est nul.

La théorie du photon. — La théorie du photon de M. Louis de Broglie rentre dans le cadre de l'étude précédente et semble, à certain point de vue, plus complète, indépendamment des idées physiques qui la caractérisent et la rendent plus satisfaisante.

Dans cette théorie, le corpuscule de spin 1 est caractérisé par un système de seize fonctions d'ondes Φ_{ik} (i, k = 1, 2, 3, 4), solutions simultanées de deux systèmes d'équations de Dirac conjugués agissant chacun sur l'un des indices i ou k de la fonction d'ondes

$$\left.\begin{aligned}\partial_t \Phi_{ik} &= [\Sigma_p\, \partial_p(\alpha_p)_{im} + \lambda i(\alpha_4)_{im}]\Phi_{mk},\\ \partial_t \Phi_{ik} &= [\Sigma_p\, \partial_p(\alpha_p)^{+}_{km} - \lambda i(\alpha_4)^{+}_{km}]\Phi_{im}.\end{aligned}\right\} \qquad (41)$$

Ce système est encore équivalent à l'équation unique

$$\partial_t \frac{1}{2}[(\alpha_4)_{il}\delta_{km} - (\alpha_4)^{+}_{km}\delta_{il}]\Phi_{lm}$$
$$= \left\{\Sigma_p\, \partial_p \frac{1}{2}[(\alpha_4)_{il}(\alpha_p)^{+}_{km} - (\alpha_4)^{+}_{km}(\alpha_p)_{il}] - \lambda i(\alpha_4)_{il}(\alpha_4)^{+}_{km}\right\}\Phi_{lm}. \qquad (42)$$

A cette équation correspond, avec la variable $x_4 = + ict$, l'équation

$$\sum_{\mu=1}^{4} \partial_\mu(\Gamma_\mu)_{ik,lm}\Phi_{lm} = \lambda\Phi_{ik}, \qquad (43)$$

dans laquelle on a posé

$$(\Gamma_\mu)_{ik,lm} = \frac{1}{2}[(\gamma_\mu)_{il}\delta_{km} + (j_\mu)_{km}\delta_{il}], \qquad (44)$$

avec $j_\mu = \gamma_\mu^{+}$ le signe + désignant la matrice transposée.

Les γ_μ et les j_μ forment deux systèmes de matrices anticommutantes de Dirac telles que

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}; \qquad j_\mu j_\nu + j_\nu j_\mu = 2\delta_{\mu\nu},$$
$$j_\mu\gamma_\nu = \gamma_\nu j_\mu.$$

Les γ_μ et j_μ forment les bases de deux systèmes de matrices de Dirac γ_a et j_a.

Par suite, une matrice générale caractérisant une grandeur quelconque du corpuscule sera de la forme

$$\Gamma^b_a = \frac{1}{2}(\gamma_a j_b + \gamma_b j_a) = \Gamma^a_b. \qquad (45)$$

Deux matrices de ce type satisfont à la loi de composition

$$\Gamma^b_a \Gamma^d_c = \frac{1}{2}(\Gamma^{bd}_{ac} + \Gamma^{bc}_{ad})$$
$$(\gamma_{ac} = \gamma_a\gamma_c, \qquad j_{bd} = j_b j_d).$$

On peut voir immédiatement, au moyen de cette règle, que les quatre matrices Γ_μ satisfont aux relations (2), (3) de l'étude précédente. Par suite, les 126 matrices obtenues par composition des quatre Γ_μ définis en (44) forment un système réductible qui se décompose en une somme de trois systèmes irréductibles de rang 10, 5 et 1.

Ceci signifie encore qu'il existe une transformation permettant de ramener simultanément ces 126 matrices sous la forme de matrices à échelons de rang 10, 5 et 1.

Mais la théorie du photon est plus large que la théorie précédente. La construction des Γ_μ nous a conduit à adopter, pour matrices représentant les grandeurs de la théorie du photon, l'ensemble des matrices de la forme Γ^b_a. Or, il y a 136 matrices de ce type qui ne s'obtiennent pas toutes par combinaisons des quatre Γ_μ. Il y a donc lieu d'examiner à nouveau la réductibilité de la théorie dans le cas de la théorie du photon.

On peut voir que la différence entre les deux théories provient du fait que la théorie du photon dérive de cinq matrices fondamentales satisfaisant aux relations (2) ou (3), une matrice Γ_5 étant construite à partir des matrices $\gamma_5 = \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\lambda$ et $j_5 = j_\mu j_\nu j_\rho j_\lambda$ suivant

$$\Gamma_5 = \frac{1}{2}(\gamma_5 + j_5).$$

Mais alors que γ_5 et j_5 s'obtenait pas combinaison des γ_μ et j_ν, Γ_5 ne s'obtient pas par une combinaison des Γ_μ.

Au moyen des cinq matrices $\Gamma\alpha$ ($\alpha = \mu, \nu, \rho, \lambda, 5$), on peut construire, par combinaison, 136 matrices linéairement indépendantes au lieu des 126 précédentes.

Ces matrices s'écrivent

$$1, \quad \Gamma_\alpha(5), \quad \Gamma_{\alpha\beta}(10), \quad \Gamma_\alpha^\beta(10), \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(50),$$
$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}(45), \quad \Gamma_\alpha^\alpha(5), \quad \Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}(10).$$

Pour étudier la réductibilité de ce système, il nous faudra chercher les matrices commutant avec Γ_μ et Γ_5. L'étude de la commutabilité des Γ_μ ayant été faite précédemment, il nous suffit d'examiner la commutabilité de Γ_5.

Posant encore

$$S = a_1 \Sigma_\mu C_\mu - a_2 \Sigma_{\mu\nu} C_{\mu\nu} + a_3 \Sigma_\mu C_{\mu 5} + a_4 C_5,$$

nous avons

$$S\Gamma_5 - \Gamma_5 S = a_1 \Sigma_\mu (1 - I_5^\mu)\Gamma_{\mu 5}^\mu$$
$$+ a_2 \Sigma_{\mu\nu}(1 - I_{\mu\nu}^5)\Gamma_{\mu\nu 5}^{\mu\nu} + a_3 \Sigma_\mu (1 - I_{\mu 5}^5)\Gamma_\mu^{\mu 5}$$

(I_5^a étant égal à $+1$ ou -1 suivant que les indices a et 5 commutent ou anticommutent).

Or,

$$I_5^\mu = -1, \qquad I_{\mu\nu}^5 = +1, \qquad I_{\mu 5}^5 = I_\mu^5,$$

d'où

$$S\Gamma_5 - \Gamma_5 S = 2(a_1 + a_3)\Sigma_\mu \Gamma_{\mu 5}^\mu,$$

S commute donc avec Γ_5 si $a_3 = -a_1$. D'autre part, nous avons vu que, pour que Γ_μ commute avec S, il faut que $a_1 + a_2 = 0$, $a_3 + a_4 = 0$.

Dans le cas de la théorie du photon, nous aurons donc

$$a_1 = -a_2 = -a_3 = a_4,$$

d'où

$$S = \Sigma_\mu C_\mu - \Sigma_{\mu\nu} C_{\mu\nu} - \Sigma_\mu C_{\mu 5} + C_5 = \sum_{1}^{5}{}_\alpha C_\alpha - \Sigma'_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta}. \quad (46)$$

Avec les notations précédentes, nous aurons ici

$$S = a(A + B).$$

Il nous reste maintenant à trouver les valeurs propres de S.

On voit facilement que S satisfait à l'équation caractéristique

$$S^2 + 2S - 15 = 0,$$

d'où l'on tire les valeurs propres $S = 3$, $S = -5$, conformément aux résultats de (21).

Mais ici les trois représentations irréductibles de la théorie précédente ne subsistent pas, les représentations de rang 5 et 1 étant fusionnées. Ceci est d'ailleurs d'accord avec le résultat auquel on devait s'attendre d'après le théorème de Burnside en décomposant le nombre total des matrices linéairement indépendantes. Nous avons, d'une part,

$$126 = 10^2 + 5^2 + 1^2$$

et, d'autre part,

$$136 = 10^2 + 6^2.$$

Il nous reste à montrer que les valeurs propres λ de S, $\lambda_1 = 3$, $\lambda = -5$ correspondent à des représentations du dixième et du sixième rang.

Pour préciser cela nous allons considérer la représentation tensorielle des fonctions d'ondes du photon.

Les seize fonctions d'ondes Φ_{ik} peuvent se représenter comme éléments d'une matrice du quatrième rang $\| \Phi_{ik} \|$. Si nous développons cette matrice sur le système complet formé par les seize matrices unitaires γ^A dérivées des γ^μ précédents, nous avons ainsi

$$\Phi_{ik} = \sum_{1}^{16}{}_A (\gamma^A)_{ik} \Phi^A, \quad (47)$$

et réciproquement

$$\Phi^A = \frac{1}{4} \Sigma_{ik} (\gamma^A)_{ki} \Phi_{ik}. \quad (48)$$

Connaissant la substitution subie par les Φ_{ik} dans une transformation de Lorentz, on en déduit la variance tensorielle des Φ^A. On voit facilement ainsi en remplaçant Φ_{ik} par son expression (47) dans la substitution subie par Φ_{ik} établie en (9) que les Φ^A se répartissent en

deux invariants	Φ^0	et	Φ^5,
deux quadrivecteurs	Φ^μ	et	$\Phi^{\mu 5}$,
un tenseur antisym. du second ordre	$\Phi^{\mu\nu}$	ou	$\Phi^{\mu\nu 5}$.

Les résultats de l'étude précédente vont nous permettre de classer ces grandeurs par rapport aux représentations irréductibles de la théorie.

Si nous considérons l'équation

$$(S)_{ik,lm} \Phi_{lm} = \lambda \Phi_{ik}, \quad (49)$$

nous savons que cette équation admet des solutions quand λ prend les valeurs $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = 5$.

Or, cette équation est équivalente à un système d'équations entre grandeurs Φ^A [Φ_{ik} étant développé suivant (47)]. Si nous multiplions (49) par une matrice arbitraire $(\eta^A)_{ki}$ et si nous prenons successivement pour η^A les seize matrices γ^A, on obtiendra un système d'équations entre Φ^A équivalent.

Ce système s'écrit

$$(\eta^A)_{ki}[\Sigma_\alpha(\gamma_\alpha)_{il}(\gamma_\alpha)^{+}_{km} - \Sigma_{\alpha\beta}(\gamma^{\alpha\beta})_{il}(\gamma^{\alpha\beta})^{+}_{km}]\Phi_{lm} = \lambda(\eta^A)_{kl}\Phi_{ik}$$

ou encore

$$(\Sigma_\alpha\gamma^\alpha\eta^A\gamma^\alpha - \Sigma_{\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}\eta^A\gamma^{\alpha\beta})_{ml}\Phi_{lm} = \lambda(\eta^A)_{kl}\Phi_{ik}.$$

Les matrices γ^α, $\gamma^{\alpha\beta}$ étant unitaires, on voit facilement que cette équation s'écrit encore

$$k_A(\eta^A)_{lm}\Phi_{lm} = \lambda(\eta^A)_{lm}\Phi_{lm}, \tag{50}$$

k_A étant un entier déterminé par les propriétés de commutation de η^A avec les matrices γ^α et $\gamma^{\alpha\beta}$.

Or, une matrice γ^α commute avec 1, γ^α et 6 $\gamma^{\alpha\beta}$ et une matrice $\gamma_{\alpha\beta}$ commute avec 1, 3 γ^α, 4 $\gamma^{\alpha\beta}$, par suite,

si $\eta^A = 1$ ou γ^α, $k_A = -5$,
si $\eta^A = \gamma^{\alpha\beta}$, $k_A = 3$.

L'équation (50) est alors satisfaite si $\lambda = \lambda_1 = 3$, par les dix $\Phi^{\alpha\beta}$ et si $\lambda = \lambda_2 = -5$ par les six Φ^0, Φ^α.

On voit ainsi que, dans la théorie du photon, dérivée de cinq Γ_α, la réductibilité classe les deux invariants dans la théorie non maxwellienne.

Mais l'équation d'ondes ne fait intervenir que quatre matrices Γ_μ et, par suite, se sépare en trois systèmes :

1° $\lambda\Phi^5 = 0$;

2° $\partial_\mu\Phi^0 = \lambda\Phi^\mu$, $\Sigma_\mu\partial_\mu\Phi^\mu = \lambda\Phi^0$;

3° $\partial_\nu\Phi^{5\mu} - \partial_\mu\Phi^{5\nu} = \lambda\Phi^{\mu\nu5}$, $\Sigma_\nu\partial_\nu\Phi^{\mu\nu5} = \lambda\Phi^{5\mu}$.

Par suite, si l'on considère les 126 matrices formées avec les Γ_μ et si l'on passe des Φ_{ik} aux Φ^A, la réduction donnera des matrices à trois échelons de rang 10, 5 et 1 et, par suite, en Φ^A, les densités de valeurs moyennes se décomposeront en une somme de trois formes quadratiques construites, l'une sur les $\Phi^{\alpha\beta}$, la seconde sur les Φ^μ et Φ^0 et la dernière nulle en raison de $\lambda\Phi^5 = 0$.

Pour les grandeurs dérivées de la représentation en Γ_α, la réduction donne des matrices à deux échelons seulement de rang 10 et 6. Les densités de valeur moyenne se décomposent en une somme de deux formes quadratiques, l'une construite sur les $\Phi^{\alpha\beta}$ et la seconde sur les Φ^0 et Φ^α, les termes en Φ^5 étant annulés.

Le système des Γ^b_a peut encore se compléter par 120 matrices de la forme

$$J^b_a = \frac{1}{2}(\gamma_a j_b - \gamma_b j_a).$$

Ces matrices sont liées entre elles et avec les Γ^b_a par les lois de composition

$$J^b_a J^d_c = \frac{1}{2}(\Gamma^{bd}_{ac} - \Gamma^{bc}_{ad}),$$

$$J^b_a \Gamma^a_c = \frac{1}{2}(J^{bd}_{ac} + J^{bc}_{ad}),$$

$$\Gamma^b_a J^d_c = \frac{1}{2}(J^{bd}_{ac} - J^{bc}_{ad}).$$

En raison de la forme de ces relations, les J^b_a ne peuvent être considérées indépendamment des Γ^b_a.

Si l'on considère le système total, on voit facilement qu'il se compose de 256 matrices déduites de quatre Γ_μ et de quatre J_μ qui entraînent l'existence de Γ_5 et de J_5. Mais ce système total n'est plus réductible, c'est-à-dire qu'il n'est plus possible de trouver une représentation dans laquelle ces 256 matrices se réduisent simultanément en matrices à échelons de même rang. Par suite, dans les densités de valeurs moyennes, les J^b_a donneront des formes quadratiques mixtes construites simultanément sur les $\Phi^{\alpha\beta}$ et les Φ^α ou Φ^0, c'est-à-dire sur un mélange des grandeurs maxwelliennes et non maxwelliennes.

Manuscrit reçu le 15 mai 1941, dont la publication s'est trouvée anormalement retardée par des circonstances exceptionnelles.

SUR LA VARIATION THERMIQUE DU CYCLE D'HYSTÉRÈSE DE QUELQUES FERROMAGNÉTIQUES

III. Sur quelques combinaisons ferromagnétiques. Relation entre les anomalies thermiques et la structure cristalline.

Par R. FORRER, R. BAFFIE et P. FOURNIER.

Sommaire. — Les quatre combinaisons ferromagnétiques étudiées Fe_3C, Fe_2B, MnB et Fe_2O_3CuO sont toutes plus ou moins anisotropes, les trois dernières présentent en outre des points d'anomalie thermique. La mesure de l'anisotropie qui n'a pas pu être effectuée directement a été remplacée par celle du champ démagnétisant structural dont le coefficient Ns est donné par la tangente initiale de la courbe anhystérétique.

Dans ces substances, étudiées toutes à l'état de poudre, se superpose au champ démagnétisant structural un assez notable champ démagnétisant dû au grain de la poudre; pour pouvoir l'évaluer on a fait son étude préliminaire en fonction de la forme des grains et de leur dilution.

Les influences des impuretés ferromagnétiques ont également été étudiées, particulièrement pour le cas où le point de Curie de l'impureté est supérieur à celui de la substance principale. Une nouvelle méthode pour l'évaluation de l'importance de l'impureté a été donnée, basée sur la mesure de son champ démagnétisant.

Retenons des résultats les suivants : L'aimantation rémanente relativement faible $\left(\frac{\sigma_R}{\sigma_\infty}\right.$ est souvent de l'ordre de $\left.0{,}1\right)$ est considérée comme caractéristique pour ces substances non cubiques et fortement anisotropes.

L'aimantation dans un champ moyen dépend surtout de la grandeur du facteur démagnétisant structural Ns. Sa variation thermique est donc apparentée à celle de $\frac{1}{Ns}$. Celle du champ coercitif h_c par contre ressemble à celle de Ns.

La grandeur magnétique la plus importante est donc le facteur démagnétisant structural Ns dont la variation thermique prend des aspects très différents pour les quatre substances étudiées. Il diminue avec la température pour Fe_3C, montre un minimum à la température d'anomalie de Fe_2B, est très grand et monte vers l'infini au point de Curie pour MnB et descend vers zéro à la température d'anomalie de Fe_2O_3CuO, en restant nul jusqu'à θ. Ces divers aspects dépendent probablement des diverses configurations des atomes dans le réseau cristallin.

Les températures d'anomalie sont considérées comme températures limites de certains réseaux secondaires d'interaction électronique. En les traitant par la relation $t_A = F\sqrt{N}$, on trouve un nombre d'interactions N qu'on cherche et qu'on réussit effectivement à localiser dans le réseau cristallin. Il en résulte que, tandis que les points de Curie proviennent des interactions entre atomes avec une certaine distance efficace (de l'ordre de 2,7 à 3,0 Å dans Fe et Mn) pour le ferromagnétisme, les températures d'anomalie sont dues à des interactions à plus courtes distances (de l'ordre de 2,3 Å à 2,5 Å).

L'existence d'un champ coercitif exceptionnellement grand dans Fe_2O CuO qui ne l'est qu'au-dessous de la température d'anomalie doit trouver son explication dans l'installation d'un réseau d'interactions supplémentaires. Celui-ci a la possibilité de s'installer suivant plusieurs plans (111). On émet l'hypothèse qu'il s'installe dans des microdomaines de façon à y créer des déformations tout en laissant au grand cristal une symétrie pseudo-cubique. Ces déformations variant rapidement d'un point à l'autre, seraient alors à l'origine du grand champ coercitif.

Introduction. — 1. La variation thermique du cycle de quelques métaux et alliages cubiques avait permis de classer les phénomènes en divers types [1]. Dans un type A, le champ coercitif s'annule au point de Curie ferromagnétique θ, déterminé par l'extrapolation de l'aimantation rémanente; dans un type B il conserve une valeur finie; dans un type C nous avons rencontré la juxtaposition des deux types A et B.

2. Un deuxième travail a montré l'interdépendance des grandeurs caractéristiques dans un élément hexagonal à forte anisotropie, le cobalt [2]. L'aimantation rémanente a un maximum aigu à la température où l'anisotropie passe par zéro. Le champ démagnétisant structural N_S et le champ coercitif par contre décroissent seulement dans la région où l'anisotropie est positive, c'est-à-dire où l'axe du cristal est un axe de facile aimantation, et restent pratiquement constants dans la région où l'anisotropie est négative, c'est-à-dire où l'aimantation peut tourner facilement dans le plan normal à l'axe du cristal. Il s'est montré d'ailleurs que le champ coercitif se compose dans la première région de

deux parties superposées, l'une, le champ coercitif de base h_0, étant constante, et l'autre $h_c - h_0$ étant variable avec le champ démagnétisant structural.

3. Dans cet article nous allons étudier quelques exemples caractéristiques de *combinaisons ferromagnétiques* : la cémentite Fe_3C, le borure de fer Fe_2B, le borure de manganèse MnB, et le ferrite de cuivre Fe_2O_3CuO. Dans toutes ces substances, le champ démagnétisant structural N_S est notable; on peut en conclure qu'elles ont une forte anisotropie magnétique qui est d'ailleurs inconnue. Elles montrent en partie des anomalies thermiques qui ont de curieuses influences sur la variation thermique du champ coercitif. Ces substances ont toutes été étudiées sous forme de poudre.

I. — Les formes normales des courbes thermiques.

1. L'aimantation spécifique σ. — On sait que l'aimantation à saturation σ_∞ décroît dans une allure parabolique vers le point de Curie θ. Dans les substances cubiques dans lesquelles N_S est égal à zéro, l'aimantation rémanente σ_R reste dans un rapport constant avec σ_∞ et $\frac{\sigma_R}{\sigma_\infty}$ est de l'ordre de 0,5 à 0,6. Dans le cobalt, substance fortement anisotrope par contre, nous avons vu [2] que σ_R est relativement petit $\left(\frac{\sigma_R}{\sigma_\infty}\right.$ est de l'ordre de 0,1 à 0,3$\left.\right)$ tant que nous ne sommes pas trop près de la température d'isotropie.

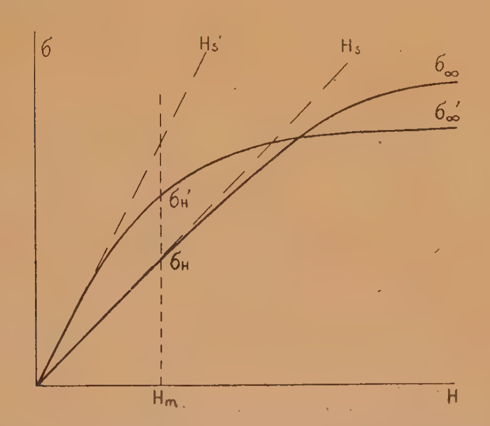


Fig. 1. — L'aimantation σ_H dans un champ moyen dépend surtout de la variation de H_S et non de σ_∞.

Dans une substance anisotrope la variation thermique de l'aimantation σ_H dans un champ moyen pas trop près du point de Curie dépend surtout de la grandeur de N_S et de sa variation thermique, comme on peut se rendre compte à l'aide de la figure 1. Soit H_S le champ démagnétisant structural et σ_∞ l'aimantation à saturation à la température t et H'_S et σ'_∞ les valeurs correspondantes à une température plus élevée t'. Dans un champ moyen H_m l'aimantation σ_H *augmentera* vers $\sigma_{H'}$ pour t', malgré la diminution de σ_∞, mais à cause de la diminution de H_S.

σ_H est donc à peu près inversement proportionnel à N_S, et il sera avantageux de comparer σ_H et $\frac{1}{N_S}$ dans les figures. La variation thermique de σ_R montre souvent une certaine ressemblance avec celle de σ_H, sa dépendance est sûrement moins simple. Signalons seulement que, dans cet article, l'aimantation rémanente σ_R est définie partout par l'intersection de la courbe descendante avec la tangente initiale à la courbe anhystérétique en tenant ainsi compte à la fois du champ démagnétisant de forme, de grain et de structure (*voir* plus loin).

2. Le champ coercitif. — Nous avons vu [2] que le champ coercitif, même dans une substance aussi anisotrope comme le cobalt, n'est pas grand, 15 à 40 œrsted seulement. Et comme nous verrons ici, nous pouvons considérer ces valeurs comme ordre de grandeur normal pour des substances même fortement anisotropes.

Nous avions vu dans [1] que dans le nickel pur, la magnétite pure et dans certains alliages le champ coercitif décroît avec une allure parabolique vers θ, comme l'aimantation à saturation. Dans ces cas h_c est donc approximativement proportionnel à σ_∞. Donc $h_c = \sim A\sigma_\infty$. Mais souvent la courbe thermique de h_c est moins courbée, s'approche même d'une droite. Or, dans ce cas h_c tend souvent vers une valeur finie h_c^0 pour le point de Curie θ. On aura donc approximativement $h_c = \sim C(\theta - t) + h_c^0$. La grandeur de l'anisotropie, et avec celle-là du champ démagnétisant structural H_S, intervenant dans la valeur du champ coercitif, nous aurons avantage de comparer dans les figures h_c et N_S.

Des anomalies thermiques modifieront profondément l'allure des courbes thermiques de N_S, σ et h_c.

II. — Sur le champ démagnétisant dû au grain de la poudre.

1. Les divers champs démagnétisants. — Les substances, étudiées dans cet article, sont à l'état de poudre ou de petits cristaux. On ajoute donc un champ démagnétisant dû au grain. Le coefficient N du champ démagnétisant global est composé par celui dû à la forme extérieure, celui dû au grain et celui dû à la structure cristalline. Donc $N = N_f + N_{gr} + N_S$. Les deux premiers dus à une forme géométrique sont constants, le troisième

peut être et est probablement variable avec la température. C'est ce troisième coefficient N_s qui nous intéresse ici spécialement. Il faut donc connaître ou au moins évaluer les deux autres. Le coefficient de forme N_f (de l'ordre de grandeur de 0,1 pour un cylindre de rapport $\frac{l}{d} = 15$, utilisé souvent ici) est pratiquement négligeable vis-à-vis du deuxième qui est de l'ordre de 1.

2. Le champ démagnétisant des grains H_d. — Il est impossible de mesurer ce champ démagnétisant seul sur la substance à étudier. Il dépend non seulement du degré de tassement, mais aussi de la forme des grains. Il ne nous reste que la ressource de mesurer le coefficient N_{gr} sur des substances ferromagnétiques de diverses formes qui sont dépourvues d'un champ démagnétisant structural (fer, nickel ou ferronickels). N_{gr} a été mesuré pour la limaille de fer, pour des petites coupures de fils de fer, pour des morceaux de formes parallélipipédiques provenant d'une tôle de permalloy et pour des petites sphères en fer ($\Phi = 1,0$ mm). Le coefficient du champ démagnétisant de forme et de grain $N = N_f + N_{gr}$ est de l'ordre de 1. Le tableau I donne les valeurs individuelles de la densité relative ρ qui mesure le degré de tassement et qui est de l'ordre de 0,5 pour un tassement complet, et de N global qui est dû surtout au grain puisque N_f est de l'ordre du dixième de N_{gr}.

Tableau I.

Substance.	ρ.	N.
a. Limaille de fer	0,50	1,00
b. Coupures de fil de fer	0,56	0,93
c. Parallélipipèdes de permalloy	0,52	1,23
d. Sphères de fer	0,53	1,22

N a été obtenu par la tangente initiale à la courbe anhystérétique [3].

Pour connaître l'effet de tassement sur N_{gr}, quatre séries d'expériences ont été faites en diluant les diverses catégories de grains à divers degrés par de la limaille de laiton. N augmente rapidement quand la densité relative diminue. Quand ρ tend vers zéro, N augmente vers l'infini.

Nous avons représenté dans la figure 2 le facteur N en fonction de ρ pour les coupures de fils de fer ($\triangledown$) et les parallélipipèdes en permalloy (□) qui donne des résultats assez concordants. Pour les faibles valeurs de ρ, nous avons représenté aussi $\frac{1}{N}$. On peut utiliser ces courbes pour en déduire le facteur N, si l'on connaît la densité relative ρ, ou inversement déterminer la densité relative ρ par une mesure du facteur N. La dernière méthode n'est correcte que s'il n'y a pas superposition d'un champ démagnétisant structural. Dans ce dernier cas le ρ trouvé par la courbe serait une limite supérieure.

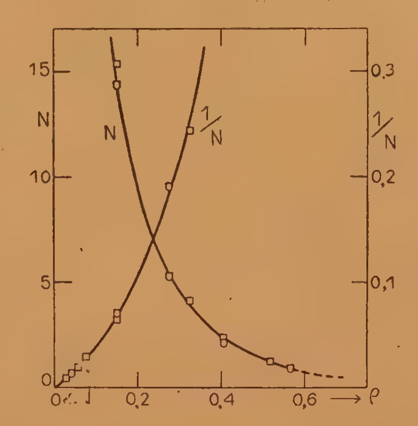


Fig. 2. — Le coefficient du champ démagnétisant dû au grain en fonction de la densité relative (tassement).

Si les grains ferromagnétiques sont assez éloignés les uns des autres pour pouvoir négliger l'influence mutuelle, c'est-à-dire si ρ tend vers zéro, le produit ρN doit tendre vers $\frac{4}{3\pi}$, le champ démagnétisant de la sphère, en admettant que les diverses positions des grains se compensent. Nous avons donc représenté les résultats en portant le produit ρN en fonction de la densité relative ρ (*fig.* 3) : N dépend fortement de la forme des grains; les sphères de fer (O) donnent les plus fortes valeurs et s'extra-

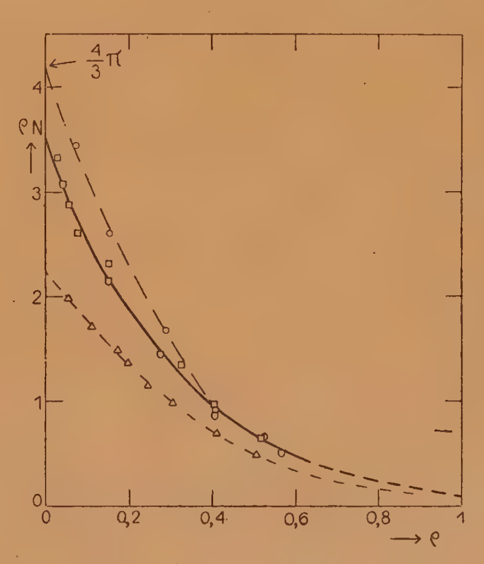


Fig. 3. — Le produit ρN en fonction de la densité relative ρ.

polent assez correctement vers $\frac{4}{3\pi} = 4{,}19$. La limaille de fer (Δ) par contre donne des valeurs très faibles qui ne s'extrapolent que vers $\rho N = 2{,}2$ environ. Cela tient probablement à ce que la limaille forme, même diluée, assez facilement des chaînes magnétiques. ρN pour la tôle (□) et le fil découpé (▽) suit une courbe intermédiaire qui se confond dans la région de $\rho = 0{,}4$ à $0{,}5$ avec celle des sphères. Nous utiliserons donc cette dernière courbe (en trait plein dans la figure 3), pour évaluer le facteur N de nos substances à étudier, en tenant compte de leur densité relative ρ.

III. — Influence des impuretés.

1. Impuretés non magnétiques. — Elles n'ont que peu d'importance. La valeur de σ serait erronée par défaut et par cela la valeur de N serait faussée. Si les impuretés se trouvent comme inclusions très fines dans la substance magnétique, le champ coercitif h_0 pourrait être augmenté notablement [4] et [5]. Mais l'allure de la variation thermique des diverses grandeurs N_g, σ_R et h_0 ne serait pas sensiblement altérée, sauf pour le cas peu probable que le corps inclus aurait lui-même une anomalie de dilatation.

2. Impuretés ferromagnétiques. — L'influence d'impuretés ferromagnétiques est très importante. Nous allons appeler A la substance magnétique à étudier, X l'impureté. On peut admettre qu'en général θ_X est différent de θ_A. Puisque θ est connu pour la plupart des ferromagnétiques, θ_X peut servir pour reconnaître la nature de l'impureté X. L'existence d'une impureté ferromagnétique pourrait simuler une anomalie du corps A à étudier, il faut donc en tenir compte soigneusement. Remarquons que sous cette réserve des impuretés X relativement importantes (même de l'ordre de 10 ou 20 pour 100) n'empêchent pas l'étude assez correcte du corps A

Il faut distinguer les cas où θ_X est plus petit ou plus grand que θ_A.

a. $\theta_X < \theta_A$. Citons comme exemple typique le cas de l'acier recuit, qui se compose de fer α et cémentite Fe_3C, avec leurs points de Curie respectifs de 700 et 215°. (Le manganèse, entrant en solution solide dans la cémentite, abaisse notablement son point de Curie.) Les aimantations θ_X et θ_A se superposent, on reconnaît facilement la présence de Fe_3C, par la diminution de σ à la température de θ_X. Mais les influences de X sur h_c et H_S sont peu ou pas du tout connues.

Nous donnons donc ici, comme exemple, la variation thermique d'un acier recuit à 0,9 pour 100 C. On voit dans la figure 4 que θ_X est peu marquée sur la courbe de l'aimantation rémanente σ_R, il l'est davantage sur celle de l'aimantation σ_{115} dans un champ extérieur de 115 œrsteds. Le facteur du champ démagnétisant structural N_S (obtenu en retranchant le facteur de forme N_f de N global), faible jusqu'à θ_X, augmente brusquement à θ_X.

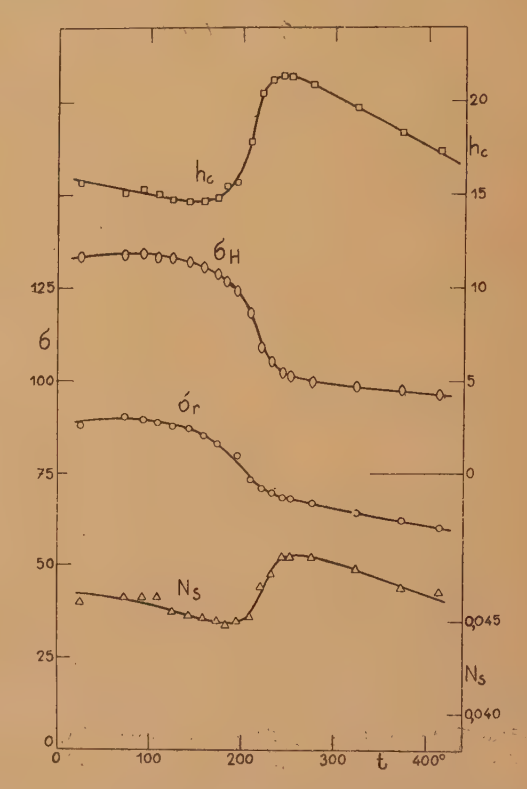


Fig. 4. — Influence de la cémentite comme impureté sur σ, N_S et h_0 du fer.

Il est évident que les trous magnétiques que laissent les grains de cémentite, devenue paramagnétique, ajoutent un champ démagnétisant. Le champ coercitif montre à θ_X un fort accroissement de 50 pour 100 environ. Une impureté ferromagnétique avec $\theta_X < \theta_A$ se fait donc remarquer par la *superposition* des aimantations σ et par des *discontinuités* dans les courbes du champ coercitif et du champ démagnétisant.

b. $\theta_X > \theta_A$. Dans un ferromagnétique les propriétés magnétiques varient fortement surtout vers le point de Curie. Dans l'impureté dont θ_X est nettement supérieur à θ_X, ses propriétés sont assez constantes jusqu'à θ_A, elles s'ajoutent évidemment à celles du corps A, mais elles altéreront peu leurs variations thermiques d'autant moins que le titre en X est petit.

Il est quelquefois intéressant de connaître la nature et la quantité relative de l'impureté. Souvent la connaissance de θ_X suffit pour reconnaître la nature de X. La quantité par contre est beaucoup plus difficile à évaluer et nous verrons qu'on

sous-estime facilement son importance. Voici les raisons : Aux températures supérieures à θ_A, la substance X se trouve en grains, séparés par la substance A paramagnétique; son coefficient de champ démagnétisant est donc très grand (*fig.* 2). Pour une quantité relative X de 0,1 par exemple, la densité relative du corps $\frac{X}{A}$ serait à peu près $\rho = 0{,}05$ si la substance est étudiée à l'état de poudre et N serait environ 60. Le cycle de la substance X serait donc extrêmement incliné et σ_X, observé dans un champ moyen, très petit. On pourrait penser d'éviter cet inconvénient en employant un champ fort pour surmonter le champ démagnétisant et arriver à la saturation σ_X de l'impureté. Or, dans ce cas le paramagnétique de A, très intense au voisinage de θ_X, se superposera à la courbe σ_X et le diagramme deviendrait indéchiffrable.

Voici *une nouvelle méthode* qui permet d'évaluer assez correctement la fraction de l'impureté X directement en volume relatif, en employant la mesure de son champ démagnétisant. Il est nécessaire pour cela que la substance X soit présente en assez grande quantité et la sensibilité de l'installation de mesure magnétique assez grande, pour qu'on puisse mesurer approximativement la tangente initiale à la courbe anhystérétique. Elle donnera le facteur N_X pour la substance X. Si σ_X est petit, ce qu'on peut admettre pour une « impureté », la dispersion en sera grande, et N_X aussi (*voir* Chap. II). La figure 2 permettra de lire la densité relative ρ_X pour un N_X donné. Puisque ρ est de l'ordre de 0,5 pour *toute* la substance tassée, le rapport $\frac{\rho_X}{0{,}5}$ donnera l'importance relative de l'impureté en volume.

Une impureté X est en général finement dispersée dans la substance principale A. Or, on sait que le champ coercitif augmente fortement avec la finesse du grain. La présence d'une impureté X avec $\theta_X > \theta_A$ se fait donc sentir par une forte *discontinuité* du h_c à θ_A (*voir* plus loin comme exemple l'impureté dans la cémentite). A $t > \theta_A$ le grand h_c de X reprend la décroissance habituelle avec la température. Évidemment cette variation thermique de X peut à son tour appartenir aux deux types différents A ou B, avec $h_c^0 = 0$ ou $h_c^0 \neq 0$.

A cause de la dispersion de la substance X, le facteur démagnétisant N devient très grand après θ_A. N montre donc aussi à θ_A une forte *discontinuité*.

Des discontinuités dans la variation thermique de h_c et de N sont donc un signe pour l'hétérogénéité de la substance, à moins qu'on soit en présence d'une véritable transformation allotropique d'un ferromagnétique. Mais dans ce dernier cas l'aimantation montre également une discontinuité.

IV. — Étude expérimentale de quelques combinaisons ferromagnétiques.

En dehors des substances décrites plus bas, on a étudié quelques ferrites qui, sauf pour le ferrite de cuivre, n'ont pas donné d'anomalies notables. Divers magnétites (de provenance différente, naturelles et synthétiques) montrent des faibles anomalies, très variables, qui donc ne nous semblent pas caractéristiques de Fe^3O^4 pur, mais plutôt des impuretés ou de la méthode de préparation. Nous les laisserons de côté. Nous nous restreignons à publier ici les résultats concernant Fe_3C, Fe_2B, MnB et Fe_2O_3CuO.

Nous signalons que nous caractériserons les données obtenues *au retour*, c'est-à-dire en descendant vers la température ordinaire par un $'$, par exemple σ'_R, h'_c, N'_S et t'_a (température d'anomalie). Dans les figures, les points observés au retour porteront un petit trait, par exemple ⌀ ◻̸.

1. Cémentite, Fe_3C. — Elle cristallise avec des axes orthorhombiques ($a = 4{,}51_7$; $b = 5{,}05_9$; $c = 6{,}73_0$) et la maille contient 4 mol (*voir* [6], t. 2, p. 33). Son moment atomique est de 9,0 magnétons de Weiss et la saturation à la température ordinaire $\sigma_{\infty 20} = 135$ [7]. La densité est 7,6.

L'échantillon étudié ici a été mis à notre disposition par M. Travers; il a été obtenu par dissolution d'une fonte blanche dans un acide. Pour la pureté, *voir* plus loin.

a. L'aimantation spécifique σ. — L'aimantation rémanente σ_R est déterminée, comme nous l'avons déjà dit, en prenant comme axe de l'aimantation la tangente initiale à la courbe anhystérétique. A la température ordinaire $\sigma_R = 12$. Son rapport avec la saturation $\frac{12}{135} = 0{,}09$ est très faible. Par analogie avec les résultats analogues du cobalt, on peut en conclure à une forte anisotropie qui est d'ailleurs probable pour un réseau rhombique.

La variation thermique de σ_R (*fig.* 5) donne d'abord une courbe concave jusqu'à 100°, ensuite une courbe d'allure parabolique habituelle avec un point de Curie θ_A à 210° environ. On observe ensuite une queue, signe d'existence d'une impureté ferromagnétique avec $\theta_A = 245°$ environ.

σ_{100} (= σ dans un champ *extérieur* de 100 œrsteds), contrairement à ce qu'on observe pour les ferromagnétiques ordinaires, *augmente* jusqu'à 180° faiblement, mais très régulièrement. Nous verrons la cause de cette anomalie dans la variation thermique du champ structural H_S (*voir* plus loin). σ_{100} décroît ensuite rapidement vers θ_A avec une amorce de la queue attribuée à une impureté X.

b. Le champ coercitif. — Il est de 30 gauss à la température ordinaire, valeur normale pour un corps anisotrope (*voir* le cobalt [2]). Sa variation thermique est presque rectiligne (*fig.* 5); il a encore

une valeur notable à θ_A ($h_c^0 = 12$ œrsteds). Fe^3C est donc un représentant typique pour le type B, décrit en [1]. On pourrait extrapoler h_c vers un θ_h situé à 320° environ.

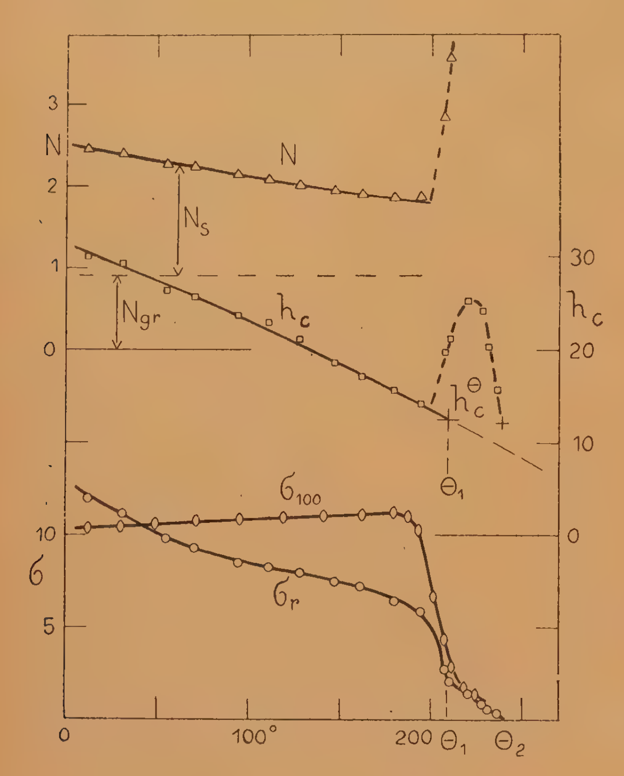


Fig. 5. — Variation thermique de σ, h_c et N_S de la cémentite, Fe_3C.

Au-dessus de θ_A nous observons une forte augmentation de h_c; c'est une preuve pour l'hétérogénéité de la substance; le champ coercitif de l'impureté X décroît ensuite fortement et semble s'extrapoler vers le point de Curie θ_X donné par σ_R. Sa variation thermique serait donc du type A.

Ne connaissant pas de ferromagnétique avec un point de Curie à 245°, nous ignorons la nature de l'impureté. Est-ce qu'il s'agit d'une modification de Fe^3C avec un point de Curie différent ? (1)

c. Le champ démagnétisant structural. — La figure 5 donne la variation thermique du coefficient global de N. Pour avoir le facteur N_S du champ démagnétisant structural, il faut en déduire le facteur constant N_{gr} dû au grain, de l'ordre de 0,9, déterminé par la méthode indiquée au Chapitre II. N_S décroît donc régulièrement vers le point de Curie θ_A et possède encore une valeur finie à θ_A, de l'ordre de 0,85.

Pour $t > \theta_A$, N augmente rapidement, autre signe de l'hétérogénéité de la substance. Pour $t = 220°$, N est égale à 6,5. Nous en déduirons par la relation entre le facteur N et la densité relative ρ la valeur $\rho_X = 0,25$. ρ pour toute la substance étudiée étant 0,58, la fraction de l'impureté ferromagnétique serait de 43 pour 100, pourcentage relativement élevé. L'étude serait donc à reprendre avec une cémentite magnétiquement plus pure.

d. Relation entre N_S, σ_H *et* h_c. — N_S diminue avec la température vers une valeur finie à θ_A. Comme nous l'avons expliqué au Chapitre I, cette diminution de N_S a pour effet l'*augmentation* de σ_H, phénomène observé souvent pour Fe_3C. Nous avions vu que h_c diminue vers une valeur finie h_c^0 pour θ_A (type B), ainsi que N_S. On est donc tenté de considérer le type B de la variation du champ coercitif avec sa valeur finie h_c^0 comme conséquence de l'existence d'une valeur finie N_s^0 du champ démagnétisant structural, mais dans d'autres substances (Fe^2B par exemple) nous avons le type A malgré une valeur élevée du facteur structural N_S au point de Curie.

2. Borure de fer Fe_2B. — Le même échantillon préparé par Binet du Jassoneix, dont les propriétés dans les champs forts et à basses températures ont été étudiées [7], a servi pour cette étude. La saturation à température ordinaire est $\sigma_{\infty 20} = 162$, la dureté magnétique est exprimée par $a = 253$ dans la loi d'approche à la saturation $\sigma = \sigma_\infty \left(1 - \frac{a}{H}\right)$. L'échantillon n'a pas montré d'impureté ferromagnétique. Sa densité est 7,37.

Toutes les variations thermiques (σ_R, σ_H, h_c, N) montrent par des coudes accentués un point d'anomalie thermique. Les variations thermiques ont été déterminées plusieurs fois, l'aspect des courbes ne varie pas notablement. Dans ce qui suit on a donné les *courbes relatives au troisième aller* (III) vers le point de Curie. Dans les parties où les courbes relatives au premier aller (I) s'en distinguent notablement, on les a données par un trait en pointillé.

a. L'aimantation. — $\sigma_H = 13$ à la température ordinaire; $\frac{\sigma_\infty}{\sigma_R} = 0,08$. Cette faible rémanence est caractéristique pour une forte anisotropie. σ_R décroît en général avec t, elle ne montre qu'un petit maximum pointu à la température d'anomalie à 225°. Elle donne par une chute rapide le point de Curie à 730° environ. Dans le premier aller, σ_R avait montré une augmentation continue jusqu'à $t_A = 225°$.

L'aimantation dans un champ extérieur de 460 œrsteds (σ_{460}) monte dès la température ordinaire et donne un maximum pointu très prononcé (coude) à $t_A = 225°$. Pour la comparaison avec le

(1) Note à la correction : M. G. Weiss, de Grenoble, a trouvé entre temps par électrolyse ignée un ferromagnétique plus riche en carbone que la cémentite, probablement Fe_2C, avec un point de Curie à 245°C. *Voir* la Note présentée aux *C. R. Acad. Sc.* le 27 novembre 1944.

champ démagnétisant structural, *voir* plus loin.

b. Le champ coercitif. — h_c est jusqu'au voisinage du point de Curie de l'ordre de 6 à 12 œrsteds, valeur normale pour une anisotropie pas trop forte, mais sa variation thermique est assez curieuse. h_c décroît d'une manière rectiligne jusqu'à la température d'anomalie à 225°. Pour le troisième aller, cette droite s'extrapole approximativement vers θ, mais l'extrapolation de la droite du premier aller, beaucoup moins incliné, donnerait un h_c^0 assez élevé (8 œrsteds).

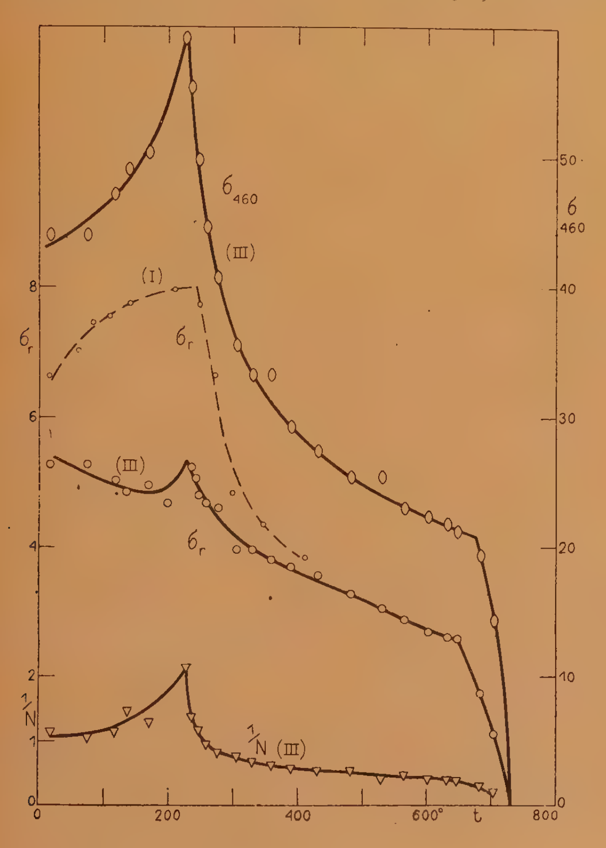


Fig. 6. — σ_R, σ_{460} et $\frac{1}{N}$ du ferrobore Fe_2B.

A partir du point d'anomalie à 225°, h_c croît très rapidement vers un maximum plat à 400° et décroît par une courbe fortement convexe vers θ. Donc $\theta_h = \theta_f$, type A. Mais dans la région des derniers 50° avant θ, la détermination de h_c est peu sûre à cause d'une évolution des propriétés par recuit.

c. Le champ démagnétisant structural. — Le coefficient N est très faible à basses températures; au voisinage de t_A il serait même plus faible que le coefficient de $N_{gr} = 1,0$ déterminé par la méthode du Chapitre II, ce qui est impossible. Il faut donc admettre qu'à la suite d'une cassure et d'un tassement particuliers à Fe_2B, il y a formation de chaînes magnétiques dans la poudre qui diminuent fortement le champ démagnétisant de grain, d'une manière analogue à ce qui se passe dans la limaille de fer. Il y a une assez forte évolution de N dans Fe_2B à la suite des recuits causés par l'expérience même. Elle est zéro justement pour le point d'anomalie; on pourrait

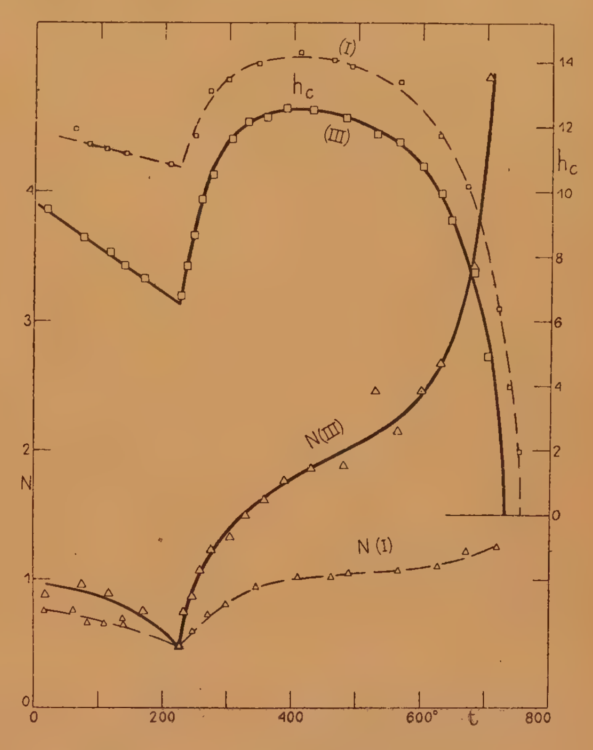


Fig. 7. — h_c et N du ferrobore Fe_2B.

donc admettre que la valeur de N à t_A correspond au facteur démagnétisant de grain N_{gr} et N_S y serait égal à zéro. C'est-à-dire à t_A Fe_2B serait isotrope magnétiquement. La faible aimantation rémanente s'oppose pourtant à ce point de vue.

Dans sa variation thermique, N décroît d'abord un peu jusqu'à t_A; monte très rapidement immédiatement après cette température d'anomalie et plus lentement entre 300° et le point de Curie. Une forte ascension juste au-dessous de θ peut être attribuée à une évolution des propriétés par suite du recuit à ces températures élevées. N a d'ailleurs évolué dans le même sens dans des expériences successives [*voir* courbe N (I) et N (III) dans la figure 7].

d. Relations entre σ_H, h_c et N. — La grandeur de σ_H et avec cela sa variation thermique dépendent donc nettement de la grandeur et de la variation de N. Pour faciliter la comparaison, on a représenté dans la figure 6 avec la variation thermique de σ_{460} aussi celle de l'inverse de N. Leur ressemblance est frappante.

La forte augmentation de h_c après la température

d'anomalie par contre est en relation directe avec l'augmentation correspondante de N (*fig.* 7). Dans le ferrobore, le coefficient du champ démagnétisant structural commande tous les autres phénomènes magnétiques, sauf la courbe de saturation évidemment.

L'explication de l'existence même de la température d'anomalie doit être recherchée dans la structure cristalline de Fe_2B (*voir* le dernier Chapitre).

3. LE BORURE DE MANGANÈSE MnB. — La structure cristalline et l'aimantation dans les champs forts ont été étudiées [8] sur un échantillon préparé par M. Andrieux par l'électrolyse à chaud [*voir* plus loin MnB (II)]. Les cristaux sont de symétrie orthorhombique, avec $a = 2{,}95$, $b = 11{,}5$ et $c = 4{,}10$ Å et 8 mol MnB. Sa densité est 6,1. M. Fallot a trouvé $\theta = 299° \pm 4$ et $\sigma_{\infty,21} = 157$. Il a constaté une dureté magnétique extraordinairement grande $\left[a = 1\,340\right.$ dans la loi d'approche $\left.\sigma = \sigma_\infty\left(1 - \frac{a}{H}\right)\right]$.

Pour nos recherches nous avons utilisé deux échantillons, qui diffèrent par leur préparation et aussi par leurs propriétés magnétiques. Les deux échantillons ont été mis à notre disposition par M. Andrieux.

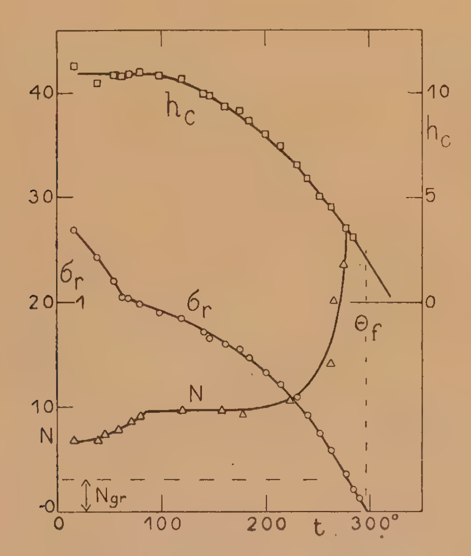


Fig. 8. — σ_R, h_c et N de MnB (I).

MnB (I) *préparé par aluminothermie* (M. Andrieux). Cet échantillon n'a pas donné à $t > \theta$ une aimantation appréciable. Il est donc magnétiquement pur.

a. L'aimantation. — $\sigma_R = 1{,}35$ à $t = 16°$. Elle est donc extraordinairement faible; $\frac{\sigma_R}{\sigma_\infty} = \frac{1{,}35}{157} = 0{,}009$. Cette observation à elle seule parle donc pour l'existence d'une forte anisotropie.

σ_R décroît d'abord avec la température vers un coude, situé à 70°, et ensuite par une courbe régulière vers $\theta = 298°$, en accord avec la détermination de M. Fallot (*fig.* 8). Mais ici σ_R descend vers θ d'une manière presque rectiligne, tandis que d'habitude σ_R a une forme parabolique. *Voir* plus loin pour la relation avec N_S.

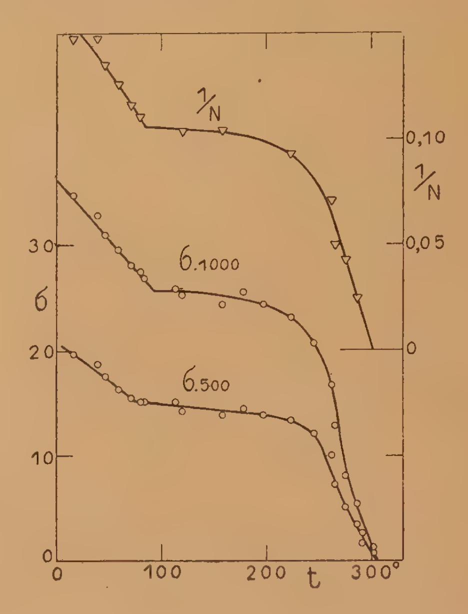


Fig. 9. — σ_{500}, σ_{1000} et $\frac{1}{N}$ de MnB (I).

Deux courbes de σ_H, l'une dans un champ extérieur de 500 et l'autre dans 1000 œrsteds (*fig.* 9), montrent des allures semblables avec celle de σ_R; pourtant le coude semble être déplacé vers 90°. Nous verrons que leur allure est commandée surtout par la variation thermique du champ démagnétisant structural.

b. Le champ coercitif. — h_c est faible ($h_c = 11$ œrsteds pour $t = 16°$), malgré la grande dureté magnétique dans les champs forts et la forte anisotropie. Il est vrai qu'on peut considérer cette substance comme très bien recuite, vu la préparation par aluminothermie. h_c reste à peu près constant jusqu'à 90° et décroît ensuite vers une valeur finie ($h_c^\theta = 2{,}1$ œrsteds) au point de Curie. Nous avons donc le type B. La variation simple et régulière de h_c permet d'extrapoler vers un $\theta_h = 326°$.

c. Le champ démagnétisant structural H_S. — Le facteur du champ démagnétisant ($N = 6{,}8$, $N_{gr} = 3$, $N_S = 3{,}8$) est déjà très grand à la température ordinaire, c'est le plus grand facteur rencontré. Il augmente encore rapidement vers un coude à 90°; d'ici il part d'abord horizontalement, augmente très rapidement à partir de 200° et semble devenir infini à θ. En effet, si l'on porte son inverse $\frac{1}{N}$ en

fonction de t (*fig.* 9), $\frac{1}{N}$ s'extrapole à peu près correctement vers zéro pour θ. Cette augmentation vers une valeur très grande, sinon infinie, nous semble être un fait extraordinaire. On pourrait être tenté d'attribuer cette forte augmentation de N à l'existence d'un mélange de substances à points de Curie étagés jusqu'à la limite supérieure θ.

d. Relations entre N_S, σ *et* h_c. — Dans la figure 9 sont réunies les courbes de $\frac{1}{N}$ et σ_H. Dans des champs moyens, l'allure de σ_H est donnée par la variation thermique du facteur du champ structural H_S.

Contrairement à ce que nous avons constaté dans le cobalt [2], dans Fe_3C et Fe_2B (ce même Chapitre, §§ 1 et 2) et à ce que nous verrons dans Fe_2O_3CuO, où le champ coercitif est à peu près proportionnel au champ démagnétisant structural, tant qu'on n'est pas trop près du point de Curie, ici le h_c semble être absolument indépendant du facteur N_S. Sa variation thermique ressemble à celle d'un alliage quelconque.

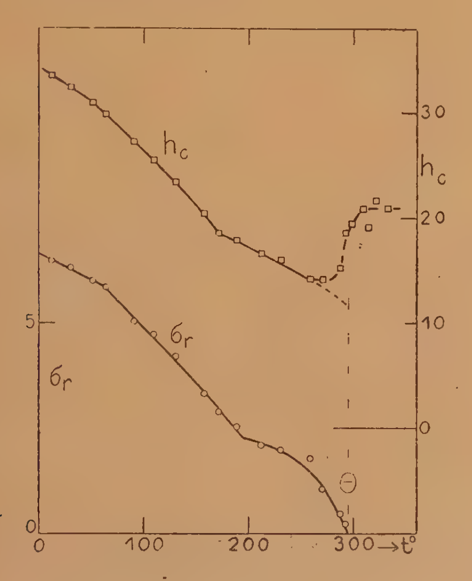


Fig. 10. — h_c et σ_R de MnB (II).

MnB (II), *préparé par électrolyse à chaud* (M. Andrieux). — Nous donnons les résultats de recherches sur cet échantillon parce qu'ils diffèrent notablement dans certains points de ceux obtenus sur MnB (I) préparé par aluminothermie. Cet échantillon a une légère impureté ferromagnétique avec $\theta_X > \theta_A$, démontrée par une petite queue à laquelle on peut attribuer un point de Curie $\theta_X = 330°$ environ; également par la discontinuité du champ coercitif à θ_A. h_{cX} est pratiquement constant entre θ_A et θ_X et de 20 œrsteds environ.

Les courbes de MnB (II) sont assez exactement réversibles sur l'aller et le retour; aussi ne donnons-nous que les courbes de l'aller.

a. Aimantation rémanente. — Elle est nettement plus grande que dans l'échantillon MnB (I). Ceci confirme l'observation sur le cobalt [2], à savoir que des recuits à hautes températures font diminuer σ_R dans des corps anisotropes, probablement par suite de la formation de grands cristaux.

σ_R décroît avec la température, comme pour MnB (I), dans deux courbes convexes formant un coude. Mais pour MnB (II), ce coude se trouve à 175° environ. Le point de Curie, déterminé par σ_R, est 296°.

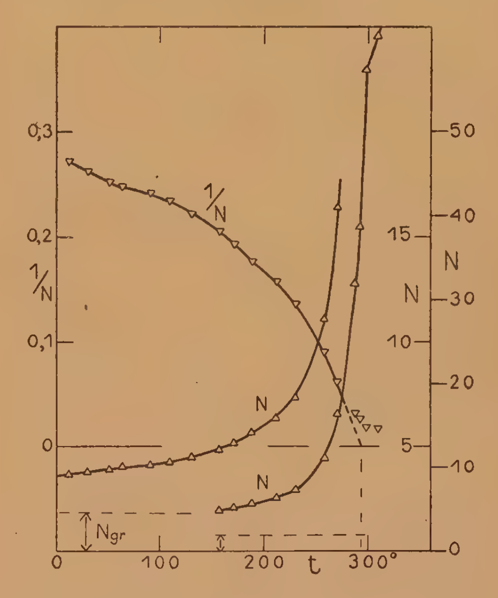


Fig. 11. — N et $\frac{1}{N}$ de MnB (II).

b. Le champ coercitif. — A $t = 12°$, $h_c = 33$ œrsteds, plus grand que dans MnB (I), probablement aussi à cause de la formation à plus basses températures. Sa variation thermique a une certaine parenté avec celle de σ_R. Elle aussi a un coude à 175°. Le premier tronçon pourrait bien être extrapolé vers θ_f. Sa variation serait donc du type A. Dans le deuxième tronçon, par contre, h_c décroît très peu et donne une grande valeur finie à θ; $h_c^{\theta} = 12,4$ œrsteds. La variation thermique de h_c de MnB (II) diffère donc nettement de celle de MnB (I). Le coude à 175° ne peut pas être attribué à un changement dans le mécanisme du renversement dans h_c, puisque le coude est concave (*voir* [1]). Il faut admettre que le point d'anomalie $t_A = 175°$ est provoqué par une variation de propriété dans le cristal. Mais curieusement, il ne se fait pas sentir sur la courbe de N_S (*voir* plus loin).

c. Le champ démagnétisant structural H_S. — Son coefficient N_S est, aussi ici, grand en rapport avec

celui de grain N_{gr} qu'on peut évaluer à 1,8; mais nettement plus petit que dans l'échantillon MnB (I).

Sa variation thermique aussi est plus simple; mais on rencontre la même forte augmentation d'allure hyperbolique vers le point de Curie. En représentant $\frac{1}{N_S}$ en fonction de t, on obtient une extrapolation assez correcte vers θ_f, déterminée par σ_R. Nous observons donc ce phénomène étrange que le coefficient du champ démagnétisant structural devient infini au point de Curie. Il serait donc intéressant de connaître la variation thermique des coefficients de l'anisotropie de MnB.

d. Relations entre N_S, h_c *et* σ_R. — Remarquons d'abord que près de la température ordinaire les points expérimentaux de σ_R, h_c et de N sont situés en dessous de la courbe régulière. Il y a donc probablement un coude à 45° environ. On peut donc considérer ce point comme température d'anomalie ordinaire. Pour en être sûr, il faudrait pouvoir poursuivre les expériences vers les basses températures.

Il est intéressant de constater que la température d'anomalie principale donnée par les coudes très marqués à 175° dans les courbes de σ_R et de h_c ne se fait pas ou à peine sentir sur la courbe de N. Il faut admettre que σ_R et h_c dépendent d'un phénomène cristallin secondaire qui est masqué par le champ structural extraordinairement grand qui lui-même n'agit pas directement sur ces deux grandeurs.

4. Le ferrite de cuivre Fe_2O_3CuO. — D'après S. Holgersson (*voir* [6], t. I, p. 417) le ferrite de cuivre cristallise comme la plupart des ferrites ferromagnétiques dans le système cubique du spinelle avec $a = 8{,}44$ Å. La mesure de saturation d'un échantillon différent ($H = 12\,000$ œrsteds, Forrer, inédit) a donné $\sigma_{12000}\ 15° = 39$.

Les échantillons ont été préparés de deux façons différentes. Le premier [Fe_2O_3CuO (I)] a été obtenu en comprimant un mélange équimoléculaire de Fe^2O^3 et CuO sous 14 t/cm² et en le recuisant 1 h à 1 000°; le second [Fe_2O_3CuO (II)] par précipitation des hydroxydes, lavage et recuit de 6 h à 1000°.

Aucun des deux échantillons n'a montré une impureté ferromagnétique. Les anomalies observées sont plus ou moins marquées. Mais la forte anomalie aux environs de 360° est commune aux deux échantillons et indépendante du mode de préparation. Malgré le recuit à 1000°, les courbes sont irréversibles au-dessous de la température d'anomalie; au-dessus elles sont pratiquement réversibles. Un recuit à une température intermédiaire (500°) diminue notablement cette irréversibilité.

Fe_2O_3CuO (I). — *a.* L'aimantation rémanente ($\sigma_R = 7$) est relativement faible, $\left(\frac{\sigma_\infty}{\sigma_R} = 0{,}18\right)$. Elle décroît assez fortement avec la température, montre une anomalie à peine perceptible à 350° environ et donne un point de Curie à 430°. Au retour elle est réversible à haute température et reste un peu plus faible en dessous de 300°.

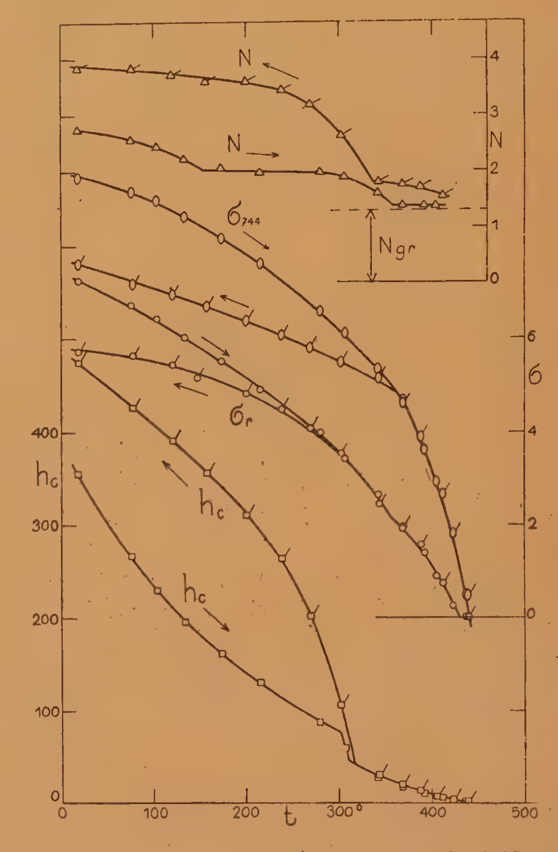


Fig. 12. — h_c, σ_R, σ_H et N de Fe_2O_3CuO (I).

σ_H (dans un champ extérieur de 744 œrsteds) montre à l'aller un faible coude à 360°, est réversible d'ici jusqu'au point de Curie, mais la courbe de retour se détache très nettement au-dessous de 360° en formant ici un coude plus marqué (*fig.* 12).

b. Le champ coercitif a une valeur *exceptionnellement forte* (360 œrsteds) à la température ordinaire. L'irréversibilité thermique (pour $t < t_A$) est ici très marquée; h_c décroît dans une courbe fortement *concave*, montre aux environs de 320° une faible discontinuité et continue dans une courbe *concave* vers le point de Curie ($\theta_h = 442°$). Le retour est pratiquement réversible jusqu'à 320° environ, mais monte dans une courbe à peu près parabolique vers des fortes valeurs à la température ordinaire ($h_c = 475$ œrsteds), de sorte qu'il résulte un coude très marqué à la température d'anomalie à 315°. Notons que les coudes, pourtant très marqués, dans les courbes de retour de σ_{744} et de h_c ne se situent pas à la même température.

c. Le champ structural. — Le coefficient N global est faible à la température ordinaire, décroît avec la température et montre un faible coude à 190°, température que nous désignons comme température d'anomalie secondaire t_{A_2}. Un autre coude faible se montre pour $t_A = 360°$ (comme pour σ_H).

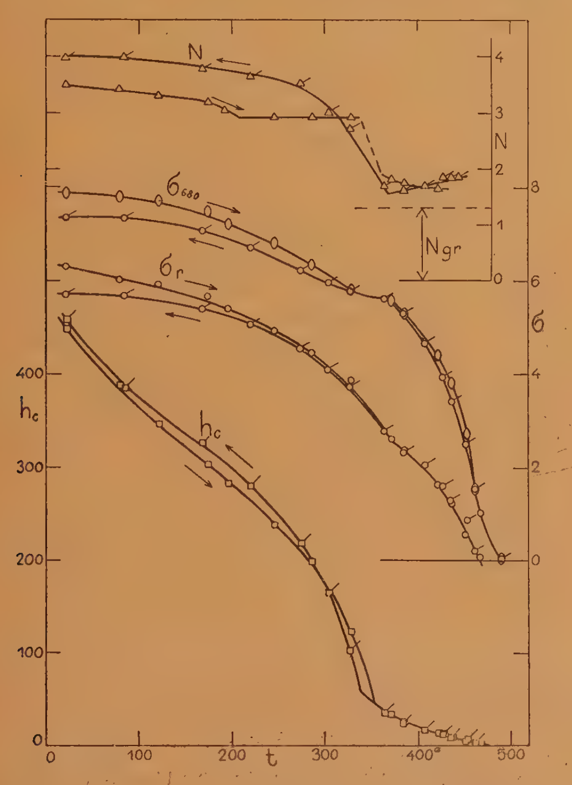


Fig. 13. — h_c, σ_R, σ_H et N de Fe_2O_3CuO (I) recuit à 500°.

La valeur entre t_A et θ, pratiquement constante, correspond à peu près à celle qu'on détermine comme facteur de champ démagnétisant de grain ($N_{gr} = 1,3$ pour $\rho = 0,51$). Il semble que dans cette région le facteur du champ démagnétisant *structural* N_S est égal à zéro pour la courbe à l'aller. Au retour, N est un peu plus fort entre θ et t_A, donne un coude assez marqué à t_A, mais ne montre pas d'anomalie secondaire. A basses températures N est maintenant nettement plus fort qu'à l'aller.

Fe_2O_3CuO (I) *recuit à* 500°. — On a essayé de supprimer la forte irréversibilité entre la température ordinaire et la température d'anomalie principale par un recuit au-dessus du point de Curie (1 h à 500°). Un premier effet de ce recuit est une *augmentation* du point de Curie vers 470° (*fig.* 13). Le h_c étant maintenant presque tout à fait réversible donne le coude très marqué à 350° environ. σ_R et σ_H, légèrement irréversibles à basses températures, montrent, l'un un coude concave et l'autre un coude convexe à 370° environ.

Pour le coefficient N les deux courbes se sont rapprochées un peu; sur l'aller l'anomalie secondaire est plutôt un peu plus marquée et à la température de l'anomalie principale N décroît maintenant par une discontinuité vers les faibles valeurs au-dessus de t_A.

Fe_2O_3CuO (II). — L'étude de cette substance confirme tout à fait les résultats obtenus par Fe_2O_3CuO (I). Les divers phénomènes sont encore plus marqués. Toutes les températures d'anomalie et le point de Curie sont un peu augmentés.

a. σ_R. — L'anomalie secondaire est à peine visible aussi sur l'aller de σ_R à 190° environ. L'anomalie principale se fait remarquer par des coudes très nets à 380° environ. Le point de Curie est situé à 490°. La grandeur de σ_R à température ordinaire n'a pas changé.

b. Le champ coercitif. — Il est plus faible d'une manière générale, probablement à cause du long recuit à haute température. Mais le rapport entre h_c de la température ordinaire et h_c au-dessus de t_A est encore plus grand. L'anomalie secondaire à 150° est maintenant aussi visible sur les courbes aller et retour du h_c qui sont d'ailleurs fortement irréversibles comme pour Fe_2O_3CuO (I). L'anomalie principale est très marquée pour le retour, et situé à 370°. Le champ coercitif entre t_A et θ s'extrapole vers un $\theta_h = 517°$. Dans cette région sa variation thermique est donc du type B avec un faible $\mathfrak{S} = \theta_h - \theta_f = 27°$.

c. Le facteur N du champ démagnétisant, toujours fortement irréversible, ne montre l'anomalie secondaire qu'à l'aller. Au retour, l'anomalie principale est très marquée.

Résumé concernant Fe_2O_3CuO. — Les résultats obtenus sur les deux échantillons I et II se confirment mutuellement. Les anomalies observées sont donc caractéristiques de ce ferrite. Les propriétés les plus caractéristiques sont l'apparition d'un champ coercitif extraordinairement grand en dessous d'une température d'anomalie principale t_A, situé à 360° environ, et aussi d'un champ démagnétisant structural. A l'aller, ces deux propriétés diminuent en deux étapes, révélant ainsi une anomalie secondaire à 150° environ.

V. — Discussion.

Les aspects des variations thermiques des propriétés magnétiques dans les champs moyens des quelques substances étudiées sont extrêmement variés. Nous allons essayer de chercher l'interdépendance des phénomènes observés et de les relier ensuite au réseau cristallin.

1. Les variations thermiques des diverses grandeurs magnétiques. — *a.* σ_H. — La variation thermique de l'aimantation σ_H dans un champ moyen loin du point de Curie dépend surtout de l'inverse du champ démagnétisant structural. Vers le point de Curie elle diminue évidemment comme l'aimantation à saturation.

b. σ_R. — Dans ce travail l'aimantation rémanente a été définie par l'intersection de la courbe d'aimantation descendante avec la tangente initiale de la courbe anhystérétique qui définit le coefficient *N*. Ainsi σ_R est en principe indépendante de *N*. En analogie avec les résultats sur le cobalt, σ_R est d'autant plus petit que l'anisotropie est grande.

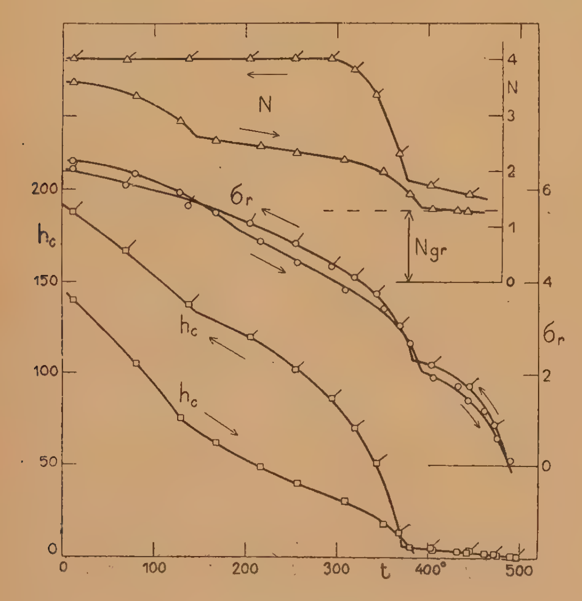


Fig. 14. — h_c, σ_R et *N* de $Fe_2O_3.CuO$ (II).

c. h_c. — Nous avons vu dans plusieurs cas que la variation thermique de h_c est modifiée par celle du coefficient N_S du champ démagnétisant structural. En admettant que le renversement de l'aimantation dans h_c se fait par déplacement de paroi, h_c dépend *indirectement* de la difficulté de rotation parce que le déplacement de paroi est accompagné d'une rotation des moments élémentaires. Il dépend aussi de l'anisotropie qui s'exprime aussi dans le coefficient N_S. Malgré cette influence de l'anisotropie, on trouve à la température ordinaire que h_c est du même ordre de grandeur (10 à 30 œrsteds) dans ces substances de nature très différente, avec exception de Fe_2O_3CuO où le h_c est exceptionnellement grand.

d. Le coefficient N_S. — Il serait évidemment du plus grand intérêt de mesurer les coefficients d'anisotropie; mais cette mesure ne se fait correctement que sur des monocristaux. Nous nous sommes donc contentés de mesurer le coefficient du champ démagnétisant structural N_S qui est facilement accessible à l'expérience.

La variation thermique de N_S est extrêmement différente pour les quatre substances étudiées (*fig.* 15). N_S décroît linéairement pour Fe^3C en conservant une valeur finie à θ, il monte hyperboliquement vers θ pour MnB, avec des valeurs exceptionnellement grandes, montre un minimum pointu à la température d'anomalie et monte ensuite vers des valeurs plus grandes pour Fe_2B et pour Fe_2O_3CuO il décroît en deux étapes vers une valeur zéro au-dessus de la température d'anomalie principale.

Le facteur N_S semble donc être entièrement indépendant de l'aimantation σ. On pourrait admettre qu'il dépend d'une part de la configuration et des distances des atomes magnétiques dans le cristal. Dans ce cas le coefficient de dilatation suivant les différents axes doit intervenir. L'augmentation de N_S vers une valeur infinie pour θ dans MnB est en tout cas difficile à comprendre.

2. Sur les températures d'anomalie. — Elles sont révélées par des coudes sur les variations thermiques de presque toutes les propriétés observées. Il est plausible de chercher leur cause dans une modification dans la structure cristalline. Mais il faut se garder, d'attribuer ces anomalies à de véritables transformations qui se traduiraient par des *discontinuités* dans toutes les propriétés. Nous sommes plutôt en présence d'anomalies qu'on appelle improprement transformation de deuxième espèce comme le point de Curie lui-même.

Il s'agit donc probablement pour t_A de la température limite d'une interaction électronique qui, tout en laissant subsister le réseau cristallin dans ses grandes lignes, pourrait le modifier légèrement, mais suffisamment pour produire les variations anormales des propriétés magnétiques observées. Nous pensons en particulier qu'une discontinuité dans le coefficient de dilatation, comme on l'observe au point de Curie du nickel par exemple, pourrait suffire pour produire de telles anomalies.

3. Relations entre la température d'anomalie t_A, le nombre des interactions *N* et la configuration du réseau cristallin. — Comme les points de Curie θ ou les points de fusion T_f, nous discuterons donc les températures d'anomalie T_A au moyen de la relation $T = F\sqrt{N}$ qui relie T_A à un certain nombre *N* d'interactions que nous *chercherons ensuite à localiser dans le réseau cristallin.* Cette relation, trouvée par les points de Curie et les points de fusion [9], a déjà été appliquée à des températures d'anomalie [10]. Dans cette relation *N* est le nombre d'interactions qu'un atome fait avec ses voisins et *F* un facteur qui correspond à l'intensité

d'interaction pour $N = 1$ qui prend souvent des valeurs discontinues $301^\circ \pm m.14^\circ$, où m est un nombre entier petit. Ce facteur F a d'ailleurs pu être mis en relation avec le nombre quantique principal n, le nombre quantique orbital l et le nombre des électrons solitaires à l'état p [11].

Nous appliquerons donc cette relation aussi aux points de Curie θ et aux températures d'anomalie T_A des substances étudiées auparavant. L'imprécision dans la détermination des points ne permettra pas de donner une valeur définitive à F, mais il n'y a aucun doute sur la valeur de N qui est un petit nombre entier (par molécule). Dans le tableau suivant sont donnés les températures de θ, θ_X et T_A, le nombre N des interactions d'un atome et le facteur F adopté pour trouver le nombre entier N.

TABLEAU II.

Substance.	Genre d'anomalie.	t (°C).	T (°K).	N.	F.
Fe_3C	θ	~210	~483	8/3	~296
	θ_X	~245	~578		~316
Fe_2B	θ	730	1003	12	289
	t_A	225	498	3	288
MnB (I)	θ	298	571	4	285
	θ_h	326	599		299
	t_A	70-90	–		–
MnB (II)	θ	296	569	4	284
	θ_X	330	603		301
	t_A	~175	~448	2	~317
	t_{A_2}	~ 45	~318	1	~318
Fe_2O_3CuO (I)	θ	430	703	6	287
	t_A	~357	~630	4	~315
Fe_2O_3CuO (I recuit)	θ	470	743	6	303
	t_A	~360	~633	4	~316
Fe_2O_3CuO (II)	θ	490	763	6	312
	t_A	~370	~643	4	~321
	t_{A_2}	~150	~423	2	~299

a. La cémentite. — La localisation des interactions a déjà été tentée dans [12]. Nous n'y reviendrons pas et mentionnerons seulement que le nombre fractionnaire $\left(\frac{8}{3}\right)$ par atome, mais entier (8) par molécule provient de ce qu'il y a deux espèces d'atomes de fer dans le réseau ($1 \times Fe_I$ et $2 \times Fe_{II}$), que Fe_I fait quatre contacts avec ses quatre voisins Fe_{II} et que les deux Fe_{II} font chacun deux contacts avec leurs deux voisins Fe_I, de sorte qu'on a en tout huit interactions par molécule.

b. Le ferrobore Fe_2B. — Son réseau cristallin quadratique est du type C 16, $CuAl_2$ (*voir* [6], t. I, p. 491 et t. II, p. 285). Notre détermination de $\theta = 730^\circ$ confirme celles de Binet du Jassoneix (725°) et de M. Fallot (739°). Sa température d'anomalie t_A est située à 225°. Il n'y a aucune autre anomalie.

1. En utilisant la relation $T = F\sqrt{N}$, le point de Curie donne $N = 12$ avec $F = 289$ environ. On peut localiser ces douze contacts en ne choisissant que les huit voisins qui se trouvent à une distance ferromagnétique efficace, de l'ordre de 2,7 à 3 Å pour le fer (²). On trouve $N = 12$ en admettant quatre contacts avec les quatre voisins (O) dans le plan [001] à la distance de 2,69 Å, et huit contacts avec les quatre voisins (□) situés dans les deux plans [001] voisins $\left(\pm\frac{c}{2}\right)$ à la distance de 2,72 Å (*fig.* 16). *Voir* la description détaillée de cette réalisation dans [12].

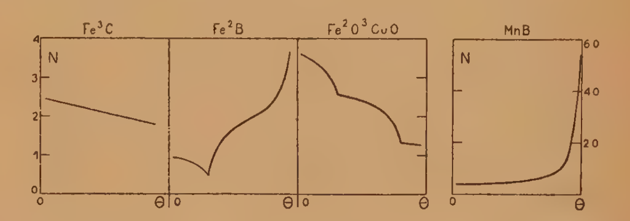


Fig. 15. — La variation thermique du coefficient N du champ démagnétisant des quatre substances étudiées.

2. Ce qui nous intéresse ici particulièrement, c'est de savoir *si l'anomalie thermique de* Fe^2B *peut être reliée à une particularité dans son réseau cristallin.* A cet effet nous appliquons de nouveau la relation des interactions à cette température. Pour $t_A = 225°C$ ($T_A = 498°K$) nous obtenons $N = 3$ avec $F = 287$, facteur presque égal à celui que nous avions trouvé pour θ avec $N = 12$.

Il s'agit de savoir si l'on peut localiser ces trois contacts dans le réseau cristallin. Or, les atomes de fer possèdent, outre les huit voisins à la distance de 2,7 Å efficace pour le ferromagnétisme, *précisément encore trois voisins* à la distance de 2,4 Å environ; un voisin est situé dans le plan de la base [100] avec $d = 2{,}40$ Å, les deux autres appartenant à des plans [100] voisins, parallèles et distants de $\pm\frac{c}{2}$, ont des distances de 2,44 Å. Ces trois voisins sont situés dans un plan [110] normal à un axe binaire (*fig.* 17).

Ainsi la *température d'anomalie* est donnée par des *interactions supplémentaires* dans des plans [110]

(²) *Voir* pour le rôle des distances pour le ferromagnétisme [13] et [14].

avec des voisins à *courte* distance, tandis que le point de Curie est donné par celles avec des voisins à une distance plus grande, efficace pour le ferromagnétisme. Ainsi cette manière de procéder, à savoir déduire d'une température (d'anomalie par par exemple) d'abord un nombre d'interactions,

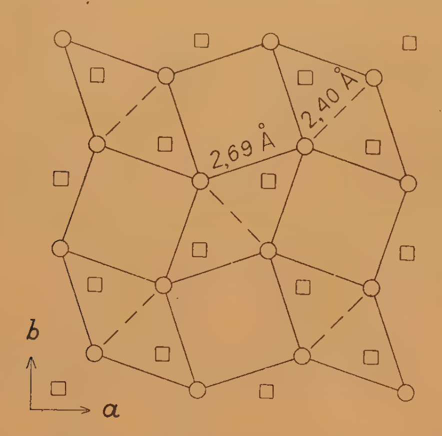


Fig. 16. — Le réseau de Fe dans Fe_2B projeté suivant [001], les cercles appartenant au plan de dessin, les carrés aux plans $\pm \frac{c}{2}$.

localiser ensuite ces interactions suivant le nombre de voisins disponibles, nous permet de reconnaître *les plans d'interactions* dans le cristal et les *distances nécessaires pour chaque espèce* d'interaction. Il est alors plausible d'attribuer les interactions à *grande* distance à des *électrons extérieurs* et celles à plus courte distance à des électrons un peu plus profonds.

Nous rencontrons donc ici un état de choses semblable à celui dans le fer α, où les interactions (faites par des électrons extérieurs) avec les six voisins dans des plans [100] à *grande distance* (2,86 Å) donnent les 12 contacts du point de Curie, et où par contre celles (faites par des électrons plus profonds) avec les huit voisins dans des plans (110) à *courte distance* (2,48 Å) donnent les 16 contacts du point de transformation $\beta - \gamma$. On peut donc dire d'une manière générale que des interactions avec des voisins à *différentes distances* donnent lieu à des réseaux d'interaction d'*espèces différentes*, ce qui s'exprime par des *phénomènes différents*.

En ce qui concerne l'influence d'un réseau d'interaction supplémentaire sur d'autres phénomènes, on peut penser qu'il agit surtout par la variation thermique des distances, c'est-à-dire par la dilatation. Au point de Curie du nickel, par exemple, il y a une discontinuité dans le coefficient de dilatation. Il est alors plausible de transposer cette propriété aussi sur la température d'anomalie et d'admettre que la variation thermique différente des deux côtés de t_A du facteur structural N_S provient d'une dilatation différente des deux côtés de t_A. La variation de N_S influerait de son côté les autres grandeurs magnétiques dans les champs moyens σ_R, σ_H, h_c,

c. Le borure de manganèse MnB. — Le réseau cristallin étudié par Hocart [8] est de symétrie orthorhombique, avec groupe spatial le plus probable $P\,n\,n\,a$; $a = 2{,}95$ Å; $b = 11{,}5$ Å et $c = 4{,}10$ Å; $x = \sim \frac{1}{6c}$, $y = \sim 0{,}15$; $z = 0{,}24$. Les atomes de Mn forment des doubles couches normales à l'axe [010] (*voir* la projection suivant [001] dans la figure 18)

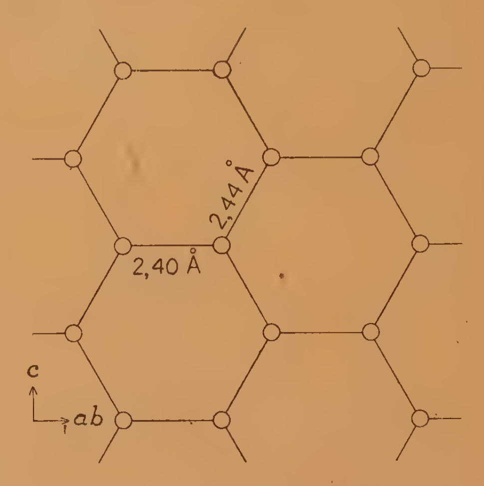


Fig. 17. — Situation réciproque des atomes de fer dans les deux plans [110] et [1$\bar{1}$0].

avec la distance intérieure de 2,30 Å (chaque atome a un voisin à cette distance) et avec la distance mutuelle de 3,45 Å. Suivant l'axe [100] les atomes de Mn forment des *chaînes linéaires* avec la distance de 2,95 Å que nous pouvons considérer comme distance efficace pour le ferromagnétisme (*voir* [13]). En ceci nous pouvons comparer MnB avec la pyrrhotine ou MnSb qui forment aussi des chaînes linéaires (mais dans le réseau du type NiAs) avec des distances de 2,89 Å.

Le point de Curie de MnB donne, par la relation des interactions, $N = 4$, comme d'ailleurs aussi la pyrrhotine et MnSb. Pour les localiser, il faut placer deux plans d'orbites en contacts, probablement suivant [010] et [001], entre les atomes à distance efficace de 2,95 Å.

Pour l'étude des causes de l'anomalie thermique, nous utiliserons celle de l'échantillon MnB (II), étant donné que l'échantillon dont M. Hocart a étudié le réseau a été préparé par la même méthode. Ce MnB (II) montre une anomalie très nette à 175° pour σ_R et h_c. Traité par la relation $T = F\sqrt{N}$, nous trouvons $N = 2$ avec $F = 317$. Où localiser ces deux contacts ?

La figure 19 donne la disposition des atomes de Mn dans un plan [010]. Nous y trouvons les chaînes linéaires (suivant [100]) avec $d = 2{,}95$ Å qui ont déjà servi pour le réseau électronique d'interaction du point de Curie. Dans ce même plan nous trouvons encore deux chaînes en zigzag à *plus*

courte distance (comme dans le cas de Fe_2B), l'une avec $d = 2{,}60$ Å, l'autre avec 2,45 Å. L'une comme l'autre convient pour localiser les *deux* contacts du point d'anomalie. Les situations dans le réseau sont d'ailleurs à peu près équivalentes. La légère différence de ces distances à la température ordinaire provient peut-être justement des contacts dans l'une des deux chaînes, les distances s'égalisant au-dessus de t_A.

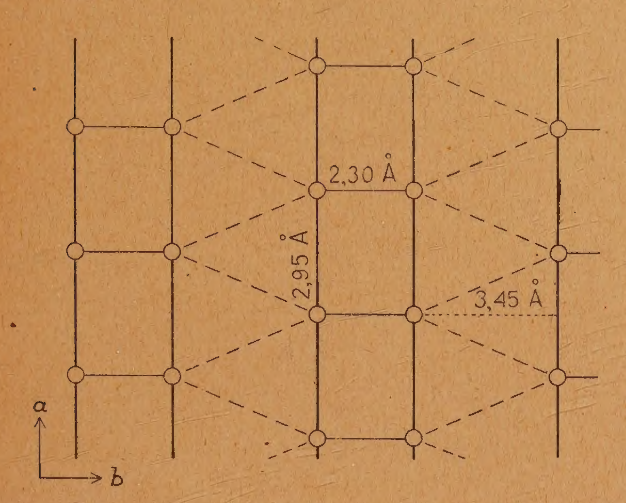


Fig. 18. — Projection des atomes de Mn dans MnB suivant [001].

Nous avions constaté que l'anisotropie à 175° ne se remarque qu'à peine sur la courbe de variation thermique du facteur structural N_S. Celui-ci étant très grand, une influence secondaire y est peut-être peu visible. Une autre interprétation est plus plausible. Les contacts supplémentaires avec $N = 2$ se font sur des chaines en zigzag. Une telle disposition crée une liaison *élastique* à grande distance dont la variation avec la température influe très peu sur la grandeur de la maille, et par conséquent sur le coefficient de dilatation et finalement sur le facteur structural.

MnB (II) montre encore une légère anomalie secondaire à 45° environ. Ce point donne, traité par la relation des interactions, $N = 1$ avec $F = 318$, facteur que nous avions déjà trouvé pour l'anomalie principale (avec $N = 2$). Aussi ce contact unique se laisse localiser dans le réseau : chaque atome possède en effet dans la couche voisine de la double couche *un seul voisin* à la très courte distance de 2,30 Å presque exactement suivant l'axe [010] (*fig.* 19).

En résumé, les interactions à *courtes* distances (2,3 et 2,5 Å environ) conduisent à des *anomalies*; celles à la distance efficace pour le ferromagnétisme de 2,95 Å conduisent au point de Curie. Ces effets sont donc tout à fait comparables à ceux trouvés dans le ferrobore.

L'origine de la croissance excessive du facteur structural N_S vers le point de Curie reste énigmatique.

d. Le ferrite de cuivre. — Il cristallise comme la plupart des autres ferrites dans le réseau cubique du spinelle. Le cas général de la situation des plans

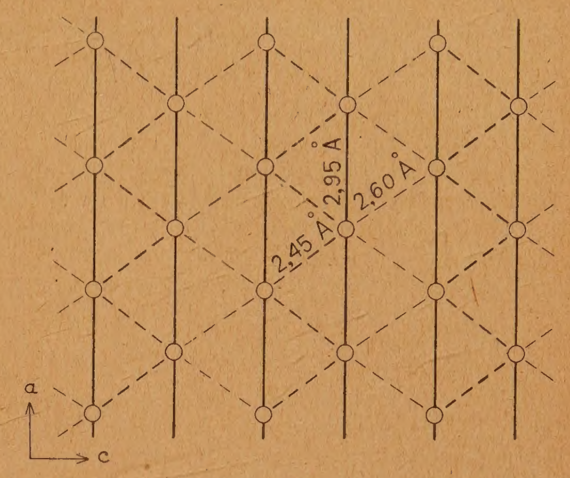


Fig. 19. — Disposition des atomes de MnB dans un plan (010).

d'interactions a déjà été traité en [12], page 205. Les atomes de fer occupent les positions indiquées dans la figure 19. Les principaux plans qui contiennent les atomes de fer en voisins directs, les

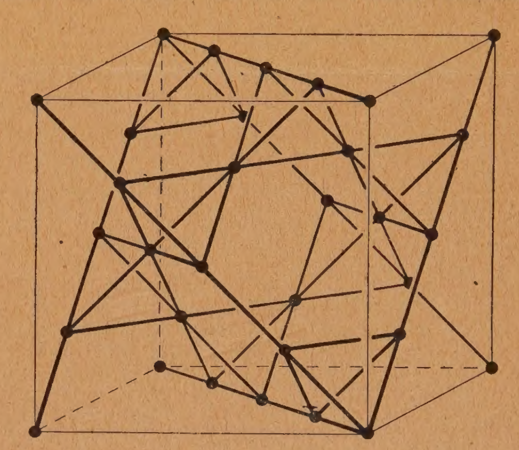


Fig. 20. — Position des atomes de fer dans le réseau de Fe_2O_3CuO.

distances Fe — Fe étant *partout* $2{,}98_3$ Å, sont alors : les trois plans (100) avec deux voisins situés suivant des axes binaires (*fig.* 20); trois plans (110) sur six avec deux voisins situés suivant des axes binaires et trois plans (111) sur quatre avec quatre voisins dont les positions relatives sont indiquées dans la figure 20.

Les trois échantillons ont donné pour points de Curie $\theta = 430$, 470 et 490°. En les traitant par la relation des interactions, on trouve $N = 6$ en adoptant comme facteurs 287, 303 et 312. (Les facteurs les plus souvent rencontrés sont 287,

301 et 315.) On peut réaliser ces six contacts en plaçant trois orbites soit dans les trois plans (100), soit dans les trois plans (110) où les atomes de fer contiennent deux voisins directs. Nous admettons la première solution, parce qu'elle respecte mieux la symétrie cubique.

Les températures d'anomalies sont moins bien définies que les points de Curie. L'anomalie principale est située à 360° environ, ce qui donne $N = 4$ avec $F = 316$ environ. Pour réaliser ces quatre contacts, il me semble le plus plausible de les localiser dans *un* des trois plans (111) où un atome de fer possède quatre voisins (*fig.* 21).

L'anomalie secondaire à 150° environ donne $N = 2$ avec $F = 299$ environ. Ces deux contacts pourront se réaliser dans *un* des trois plans (110) où un atome de fer a deux voisins.

Nous trouvons donc la possibilité de localiser les trois espèces de contacts dans le réseau cristallin. Or, il faut remarquer ici que, contrairement aux cas de Fe_2B et MnB où nous attribuions les différentes anomalies (y compris le point de Curie) à des contacts à différentes distances, dans le ferrite de cuivre les contacts se font *tous* entre atomes de même distance, mais les orbites en contact sont situées dans *différentes catégories* de plans [(100) pour θ, (111) pour t_{A_1} et (110) pour t_{A_2}]. Nous reviendrons sur cette question dans la discussion suivante.

4. Sur le champ coercitif exceptionnellement grand du ferrite de cuivre. — Le champ coercitif est, en général, loin du point de Curie, à peu près du même ordre de grandeur, d'une dizaine à une trentaine d'oersteds, malgré la diversité des substances et leurs réseaux. Même le champ démagnétisant structural ne change pas cet ordre de grandeur, quoiqu'il modifie notablement l'allure de la variation thermique.

Or, nous trouvons dans le ferrite de cuivre, et *seulement en-dessous de la température d'anomalie*, un champ coercitif exceptionnellement grand (150 à 450 œrsteds à la température ordinaire). Il se pose donc la question de l'origine de ce grand champ coercitif. Puisqu'il diminue fortement vers t_A, pour prendre ensuite des valeurs normales, il est naturel d'en chercher l'explication dans le mode d'établissement des interactions auxquelles nous attribuons l'apparition de cette anomalie.

Voici notre raisonnement : On sait qu'une déformation uniforme modifie peu le champ coercitif. On obtient par contre des grands champs coercitifs par des tensions très variables d'un point à l'autre (acier trempé, alliages ségrégés). Il faudrait donc admettre que dans Fe_2O_3CuO se forment de ces tensions à courte échelle pour $t < t_A$, mais pas pour $t > t_A$.

Or nous avons vu que dans les autres substances à anomalie (Fe^2B et MnB) la situation du réseau d'interaction qui crée le point d'anomalie est donnée *sans équivoque* par le réseau cristallin. Si donc ce réseau de contacts déforme le cristal, il le fait *uniformément* dans tout le cristal, ce qui modifie peu le champ coercitif.

Dans Fe_2O_3 Cu O par contre, le plan des contacts du réseau supplémentaire d'interactions (avec $N=4$) peut être situé dans *un des 3 plans* (111) où un atome de fer a quatre voisins. On peut donc imaginer que ce plan de contact choisit dans différentes parties d'un cristal des plans (111) tels que les déformations qui en résultent conservent au cristal entier sa symétrie cubique en gros. Les déformations résultantes à petite échelle créeraient ainsi le grand champ coercitif. Dans Fe_2O_3 Cu O les déformations auraient lieu pour $t < t_A$ suivant *un* des quatre plans (111).

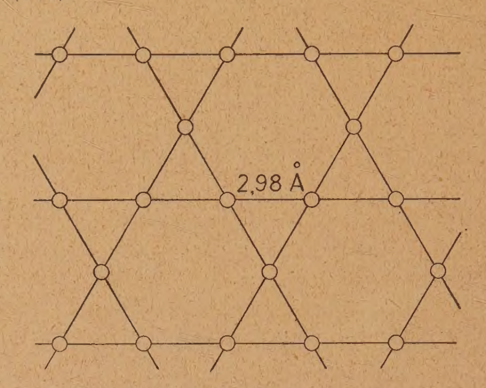


Fig. 21. — Situation relative des atomes de fer dans un plan (111).

Sans entrer dans le détail d'une réalisation de telles déformations dans l'espace, nous donnons dans la figure 22 comme exemple un réseau plan quadratique à face centrée qui devient pseudo-quadratique par des déformations suivant des axes binaires dans des microdomaines. Les déformations résultantes sont alors très variables d'un point à l'autre. Il serait intéressant de chercher l'existence de ces microdomaines déformés et leurs dimensions par la méthode des rayons X.

Nous mentionnons encore que l'augmentation supplémentaire du champ coercitif au-dessous de l'anomalie secondaire t_{A_2} s'explique de la même façon, étant donné que le plan d'interaction correspondant à cette anomalie n'est pas déterminé non plus d'une manière équivoque dans le réseau cristallin.

5. Remarques sur les valeurs discontinues du facteur F. — Dans ses études sur la relation $T = F\sqrt{N}$ ([15] et [11]), l'auteur avait remarqué que le facteur F qu'on trouve en admettant pour N des nombres entiers par molécule prend souvent des valeurs discontinues $F = 301 \pm m\,14°$, où m est un petit nombre entier. Cette différence de 14° entre deux facteurs a été trouvée en particulier pour les points de Curie ferromagnétique θ_f et paramagnétique θ_p du nickel, du fer et du gadolinium.

Ici les échantillons Mn B (II) et Fe_3C possèdent des impuretés ferromagnétiques X avec des θ_X

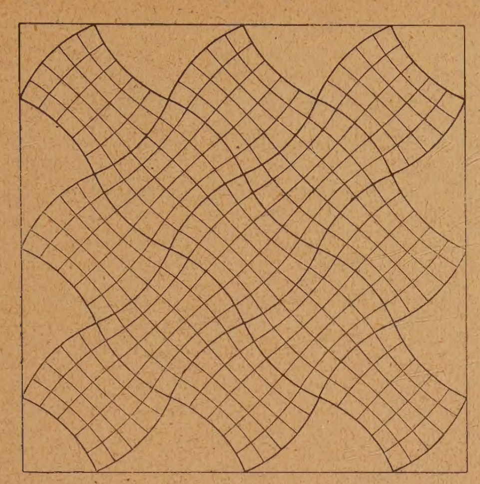


Fig. 22. — Un réseau quadratique devient pseudo-quadratique par des déformations suivant un axe binaire dans chaque microdomaine.

peu supérieurs à θ_A. Ces θ_X ne sont pas situés sur les θ d'autres ferromagnétiques connus. On pourrait admettre que l'impureté X a la même constitution chimique que le corps principal A, mais dont le θ est augmenté, pour une raison d'ailleurs inconnue, par l'augmentation de F seulement d'une unité de 14° en conservant le nombre entier N. Les augmentations de F sont en effet de l'ordre de 14°.

Dans Fe_2O_3CuO (I) le point de Curie a augmenté par un recuit à 500°; en conservant constant $N=6$, on trouve aussi ici la différence des facteurs F de l'ordre de 14°.

Ces ferromagnétiques pourraient donc exister dans des états différents, caractérisés par la différence des θ, causée celle-ci même par la discontinuité de 14° dans l'intensité de l'interaction (facteur F). Ces constatations peuvent être rapprochées du fait que le chlorure d'iode I Cl existe en deux états avec deux points de fusions (13°,9 et 27°,2) différents qui donnent avec $N = 1$, $F = 287,0$ et 300°,3 avec la différence de 13°,3 du même ordre de grandeur (*voir* [14]).

Il est curieux de constater que cette même différence de 14° se trouve entre les facteurs déduits des facteurs F déterminés par le point de Curie ferromagnétique θ_f et le point de Curie du champ coercitif θ_h d'une même substance, Mn B (I).

Manuscrit reçu le 24 juin 1944.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] R. Forrer et R. Baffie, *Journ. de Phys.*, 1944, **5**, p. 97.
[2] R. Forrer, R. Baffie et P. Fournier, *J. de Phys.*, 1945, **6**, p. 51.
[3] R. Forrer, *Cahiers de Physique*, 1943, n° **15**, p. 57.
[4] Kersten, *Phys. Zschr.*, 1943, **44**, p. 63.
[5] L. Néel, *Cah. de Phys.*, 1945.
[6] P. P. Ewald et C. Hermann, *Strukturberichte*, Leipzig.
[7] P. Weiss et R. Forrer, *Ann. de Phys.*, 1929, **12**, p. 279.
[8] R. Hocart et M. Fallot, *C. R.*, 1936, **203**, p. 1062.
[9] R. Forrer, *Ann. de Phys.*, 1935, **4**, p. 202.
[10] R. Forrer, *Ann. de Phys.*, 1936, **5**, p. 719.
[11] R. Forrer, *Journ. de Phys.*, 1937, **8**, p. 241.
[12] R. Forrer, *Journ. de Phys.*, 1933, **4**, p. 186.
[13] R. Forrer, *Journ. de Phys.*, 1933, **4**, p. 109.
[14] L. Néel, *Ann. de Phys.*, 1936, **5**, p. 232.
[15] R. Forrer, *Ann. de Phys.*, 1937, **7**, p. 429.

SUR LA « THÉORIE CORPUSCULAIRE DE LA LUMIÈRE » DE M. DOLIGEZ

Par D. BELORIZKY,
Astronome à l'Observatoire de Marseille.

Sommaire. — L'hypothèse, émise par M. Doligez, de la propagation de la lumière dans les corps transparents suivant une ligne sinueuse est inadmissible.

Dans un article publié par le *Journal de Physique* (8e série, vol. 5, 1944, p. 136), M. Doligez propose une nouvelle théorie corpusculaire de la lumière qui explique, d'après lui, les différentes lois de l'Optique et, en particulier, l'entraînement partiel des ondes par la matière en mouvement, et qui ne fait appel ni à l'éther ni à la théorie relativiste.

Soit un milieu transparent d'indice n, animé d'un mouvement de translation de vitesse v. Si V'_a est la vitesse de la lumière dans le milieu en question, et V_a la vitesse de la lumière dans ce même milieu, supposé en repos, on a

$$V'_a = V_a + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

C'est la formule de Fresnel, confirmée par des expériences de Fizeau.

On sait que cette formule se déduit directement des formules de Lorentz de la théorie de la Relativité.

En effet, d'après ces formules,

$$V'_a = \frac{V_a + v}{1 + \frac{V_a v}{C^2}},$$

où C est la vitesse de la lumière dans le vide. Puisque $\frac{V_a}{C} = n$, on a

$$V'_a = V_a + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right),$$

si l'on néglige les termes de l'ordre de $\frac{v^2}{C}$.

Or, M. Doligez veut bien admettre que la lumière est pesante et que « ceci se déduit des théories d'Einstein », mais il ne veut pas admettre ces théories. D'après lui, puisque la lumière est déviée de la ligne droite quand elle passe au voisinage du disque solaire, « elle doit l'être également lorsqu'elle passe à proximité des noyaux atomiques dans sa traversée des corps transparents ».

Aussi M. Doligez suppose-t-il que la propagation de la lumière à l'intérieur des corps transparents isotropes ne s'effectue pas suivant la ligne droite, mais suivant une ligne sinueuse avec la vitesse dans le vide. « Les sommets de la ligne sinueuse sont les sommets de l'hyperbole que le grain de lumière, ou photon, décrit autour d'un noyau atomique comme foyer. » M. Doligez admet que, par raison de symétrie, la direction générale de cette ligne sinueuse est une ligne droite dans les corps isotropes. Cette ligne droite représente la propagation apparente de la lumière. La vitesse apparente est évidemment plus petite que la vitesse vraie sur la ligne en zigzag, car le chemin apparent est plus court. Le rapport du chemin en zigzag par rapport au chemin rectiligne apparent est, d'après M. Doligez, l'indice de réfraction.

Remarquons que l'indice de réfraction pour les liquides et solides transparents est de l'ordre de 1,5. Ainsi M. Doligez admet que le chemin sinueux est 1,5 fois plus long que le chemin rectiligne apparent.

Puisque M. Doligez n'admet pas la théorie de la Relativité, essayons de calculer la déviation de la lumière au voisinage d'un noyau atomique par la gravitation newtonienne.

Soit δ la déviation de la lumière au voisinage immédiat d'un noyau. Remarquons que, d'après la théorie de la Relativité, la déviation de la lumière au voisinage du disque solaire est égale à $1'',75$, tandis que si l'on admet seulement la nature corpusculaire de la lumière et la loi de gravitation de Newton, cette déviation est égale à $0'',87$.

Soit P le centre du noyau. Le mouvement du photon est une hyperbole admettant pour foyer le centre P du noyau et dont les assymptotes ont l'équation suivante, si l'on prend comme axes les axes de symétrie de l'hyperbole en question :

$$\frac{y}{x} = \pm\sqrt{e^2 - 1},$$

où e est l'excentricité de l'hyperbole.

La déviation $\delta = 2 \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}}$.

L'équation de forces vives donne

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu}{a},$$

v étant la vitesse du photon, r son rayon vecteur et $\mu = fm$; f étant la constante de gravitation et m la masse du noyau, que nous prendrons; pour fixer les idées, de poids atomique égal à 100.

Pour $r = \infty$, $v^2 = C^2$, où C est la vitesse de la lumière dans le vide, loin de toute la matière.

Par conséquent,

$$\frac{\mu}{a} = C^2.$$

D'autre part,

$$a(e - 1) = d,$$

où d est le rayon du noyau, car nous supposons le photon passant au voisinage immédiat du noyau.

Par conséquent,

$$e = 1 + \frac{d}{a} = 1 + \frac{dC^2}{\mu}.$$

On a

$$C = 3.10^{10}\,\text{cm}, \qquad f = 6,7.10^{-8},$$
$$m = 1,7.10^{-24} \times 100\,\text{g} = 1,7.10^{-22}\,\text{g}.$$

Par conséquent,

$$fm = \mu = 11,4.10^{-30}.$$

En prenant

$$d = 10^{-17}\,\text{cm},$$

on a

$$dC^2 = 9.10^3$$

On voit ainsi que

$$e = 8.10^{32}.$$

Ainsi, la déviation

$$\delta = 2 \operatorname{arctang} \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}} = \frac{2}{e} = \frac{1}{4.10^{32}}.$$

En remarquant que $1'' \sim \frac{1}{200\,000}$, on voit que la déviation de la lumière au bord d'un noyau sera *de l'ordre de* 10^{-27} *de seconde d'arc*.

Par conséquent, il n'y a pas de déviation et le chemin sinueux de M. Doligez est pratiquement rigoureusement rectiligne. Ainsi, l'indice de réfraction serait égal à 1.

On voit, par ce qui précède, que l'hypothèse de M. Doligez est inadmissible.

Manuscrit reçu le 3 janvier 1945.

Le Gérant : MAURICE BLONDIN. 120798 IMP. GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins, Paris. — 1945.